

Задача 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2, 3, 5)$, $B(1, -3, 4)$ и $C(7, 8, -1)$.

Решение: Рассмотрим вектора

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

и

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Они лежат в плоскости, уравнение которой нужно найти. А для нахождения уравнения плоскости достаточно знать точку, через которую она должна проходить, и нормаль вектор, перпендикулярный плоскости. Нормаль можно получить, воспользовавшись векторным произведением двух векторов в этой плоскости.

Векторным произведением двух векторов является третий вектор, направленный перпендикулярно обоим векторам и образующий с ними правую тройку векторов.

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}((-6) \cdot (-6) - 5 \cdot (-1)) - \vec{j}(3 \cdot (-6) - 9 \cdot (-1)) + \vec{k}(3 \cdot 5 - 9 \cdot (-6)) = \\ &= 41\vec{i} + 9\vec{j} + 69\vec{k}. \end{aligned}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору нормали $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, можно записать как $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Далее следует раскрыть скобки и привести подобные члены.

Уравнение плоскости будет следующим:

$$41 \cdot x + 9 \cdot y + 69 \cdot z - 41 \cdot (-2) - 9 \cdot 3 - 69 \cdot 5 = 0,$$

то есть

$$41x + 9y + 69z - 290 = 0.$$

Ответ: уравнение плоскости $41x + 9y + 69z - 290 = 0$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.