

Задача 1. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} 6x + y = 22 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 22 \\ 3 & 1 & 13 \end{array} \right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

- (а) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
- (б) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \rightarrow rR_i$),
- (в) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \rightarrow R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 22 \\ 3 & 1 & 13 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 13 \\ 6 & 1 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \\ &\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1/3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.