

Геометрические характеристики плоских сечений

Заданное сечении, состоящее из трех профилей (Рис.1) построить в масштабе и для него:

1. Определить координаты центра тяжести сечения в исходных осях $Z_0 Y_0$, построить центральные оси параллельные исходным;
2. Построить главные центральные оси сечения;
3. Определить главные моменты инерции;
4. Определить главные радиусы инерции и построить эллипс инерции сечения.

Заданное сечение состоит из: 1 - полосы 100×10 мм, 2 - швеллера по ГОСТ 8240-89 № 10, 3 - неравнобокого уголка по ГОСТ 8510-86 $h = 45$ мм, $b = 28$ мм, $t = 4$ мм.

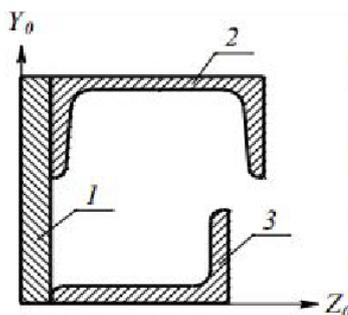


Рис. 1

Решение:

Выписываем все необходимые для расчета данные (для швеллера и уголка из сортамента):

1. Полоса: $b_1 = 1$ см; $h_1 = 10$ см; $F_1 = b_1 \cdot h_1 = 1 \cdot 10 = 10$ см².

$$J_{z1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 10^3}{12} = 83,3 \text{ см}^4;$$

$$J_{y1} = \frac{b_1^3 \cdot h_1}{12} = \frac{1^3 \cdot 10}{12} = 0,83 \text{ см}^4.$$

2. Швеллер №10 (ГОСТ 8240 – 89).

$$F_2 = 10,9 \text{ см}^2; \quad J_{z2} = 20,4 \text{ см}^4; \quad J_{y2} = 174 \text{ см}^4; \quad y_{02} = 1,44 \text{ см}; \quad h_2 = 4,6 \text{ см};$$

$$b_2 = 10 \text{ см}.$$

3. Уголок неравнобокий 28 × 45(h)x4 мм (ГОСТ 8510 – 86):

$$F_3 = 2,8 \text{ см}^2; \quad J_{z_3} = 5,68 \text{ см}^4; \quad J_{y_3} = 1,69 \text{ см}^4;$$

$$z_{o3} = 0,68 \text{ см}; \quad y_{o3} = 1,51 \text{ см}; \quad b_3 = 2,8 \text{ см}; \quad h_3 = 4,5 \text{ см}.$$

Выполним в масштабе заданное сечение с центральными осями каждого сечения $Z_1, Y_1; Z_2, Y_2; Z_3, Y_3$ (Рис. 2). Размеры даны в см.

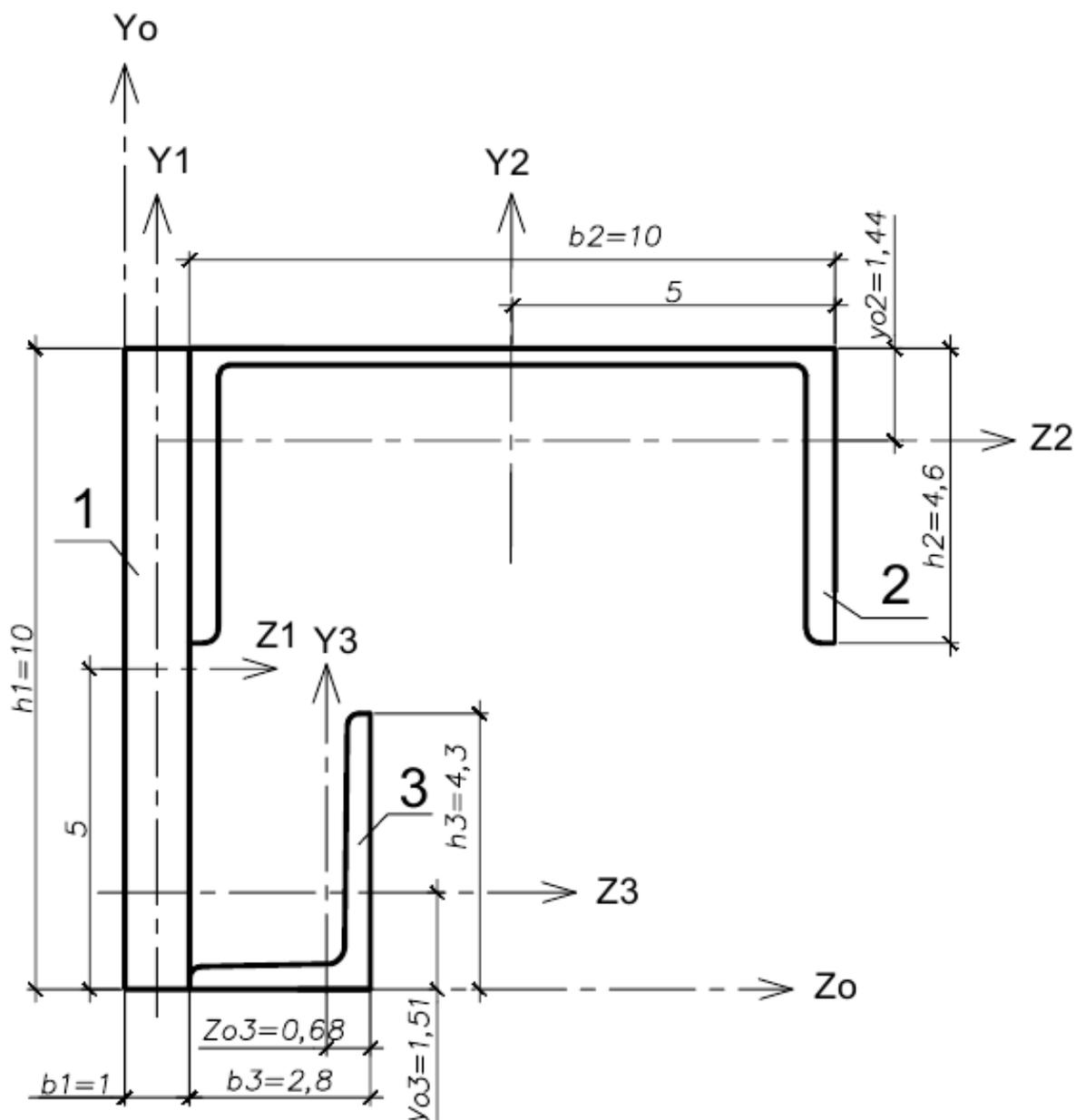


Рис. 2

Для определения центра тяжести сечения определим относительно осей Z_0, Y_0 координаты центров тяжести элементов сечения.

1. Для пластины: $z_1 = 0,5$ см; $y_1 = 5$;

$$2. \text{ Для швеллера: } z_2 = b_1 + \frac{b_2}{2} = 1 + \frac{10}{2} = 6 \text{ см};$$

$$y_2 = h_1 - y_{02} = 10 - 1,44 = 8,56 \text{ см};$$

$$3. \text{ Для уголка: } z_3 = b_1 + b_3 - z_{03} = 1 + 2,8 - 0,68 = 3,12 \text{ см};$$

$$y_3 = y_{03} = 1,51 \text{ см}.$$

Вычисляем координаты центра тяжести составного сечения по формулам:

$$\begin{aligned} z_c &= (F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3) / (F_1 + F_2 + F_3) = \\ &= (10 * 0,5 + 10,9 * 6 + 2,8 * 3,12) / (10 + 10,9 + 2,8) = 3,34 \text{ см}; \\ y_c &= (F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3) / (F_1 + F_2 + F_3) = \\ &= (10 * 5 + 10,2 * 8,56 + 2,8 * 1,53) / (10 + 10,9 + 2,8) = 5,97 \text{ см}; \end{aligned}$$

Откладываем от исходных осей Z_0, Y_0 координаты центра тяжести z_c, y_c и через полученную точку C проводим центральные оси Z_C и Y_C параллельно исходным осям Z_0, Y_0 .

Для вычисления осевых (J_{z_c}, J_{y_c}) и центробежного ($J_{z_c y_c}$) моментов инерции сечения относительно центральных осей (Z_C, Y_C) применим формулы для вычисления моментов инерции составного сечения при параллельном переносе осей:

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= J_{z_c}^I + J_{z_c}^II + J_{z_c}^III = (J_{z_1} + n_1^2 \cdot F_1) + (J_{z_2} + n_2^2 \cdot F_2) + (J_{z_3} + n_3^2 \cdot F_3) = \\ &= [83,3 + (-0,97)^2 * 10] + (20,4 + 2,59^2 * 10,9) + [5,68 + (-4,46)^2 * 2,8] = \\ &= 92,71 + 93,52 + 61,38 = 247,61 \text{ см}^2, \end{aligned}$$

где n_1, n_2 и n_3 – расстояния от центральной оси Z_C до осей z_1, z_2 и z_3 , соответственно. Т.е. имеем:

$$n_1 = y_c - \frac{h_1}{2} = 5,97 - \frac{10}{2} = 0,97 \text{ см};$$

$$n_2 = h_1 - y_{01} - y_c = 10 - 1,44 - 5,97 = 2,59 \text{ см};$$

$$n_3 = y_c - y_{03} = 5,97 - 1,51 = 4,46 \text{ см}.$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^II + J_{y_c}^III = (J_{y_1} + m_1^2 \cdot F_1) + (J_{y_2} + m_2^2 \cdot F_2) + (J_{y_3} + m_3^2 \cdot F_3)$$

$$= [0,83 + (-2,84)^2 \cdot 10] + (174 + 2,66^2 \cdot 10,9) + [1,69 + (-0,22)^2 \cdot 2,8] =$$

$$= 81,49 + 251,12 + 1,82 = 334,43 \text{ см}^4,$$

где m_1 , m_2 и m_3 – расстояние от центральной оси Y_C до осей y_1 , y_2 и y_3 , соответственно. Т.е. имеем:

$$m_1 = z_C - \frac{b_1}{2} = 3,34 - 0,5 = 2,84 \text{ см};$$

$$m_2 = b_1 + \frac{b_2}{2} - z_C = 1 + \frac{10}{2} - 3,34 = 2,66 \text{ см};$$

$$m_3 = b_1 + b_3 - z_C = 1 + 2,8 - 3,34 - 0,68 = -0,22 \text{ см}.$$

$$J_{z_C y_C} = J_{z_C y_C}^1 + J_{z_C y_C}^2 + J_{z_C y_C}^3 = (J_{z_1 y_1} + n_1 \cdot m_1 \cdot F_1) + (J_{z_2 y_2} + n_2 \cdot m_2 \cdot F_2) +$$

$$(J_{z_3 y_3} + n_3 \cdot m_3 \cdot F_3) = [0 + (-0,97) \cdot (-2,84) \cdot 10] + [0 + 2,59 \cdot 2,66 \cdot 10,9] +$$

$$+ [1,77 + (-4,46) \cdot (-0,22) \cdot 2,8] = 27,55 + 75,09 - 0,98 = 101,66 \text{ см}^4.$$

При вычислении центробежного момента инерции $J_{z_C y_C}$ следует учесть, что для симметричных сечений (швеллер, пластина) центробежные моменты инерции относительно их собственных центральных осей равны нулю, т.к. оси симметрии являются главными осями. Тогда $J_{z_1 y_1} = 0$, $J_{z_2 y_2} = 0$. Оси z_3 , y_3 не являются главными центральными осями для уголка, поэтому $J_{z_3 y_3} \neq 0$. Для его вычисления при $\text{tg } \alpha = 0,379$, $\alpha = 20,78^\circ$ воспользуемся формулой:

$$J_{z_3 y_3} = - \frac{J_y - J_x}{2} \cdot \text{tg } 2\alpha = - \frac{1,69 - 5,68}{2} \cdot 0,887 = 1,77 \text{ см}^4.$$

Определяем угол поворота α_0 главных центральных осей инерции по формуле:

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2J_{z_C y_C}}{J_{y_C} - J_{z_C}} = \frac{2 \cdot 101,66}{334,43 - 247,61} = 2,34. \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg 2,33 = 33^\circ 35'.$$

Откладываем от оси Z_C угол α_0 против часовой стрелки и проводим взаимно перпендикулярно главные оси для составного сечения U и V , соответственно.

Вычисляем главные центральные моменты инерции. Для их вычисления используем формулу:

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{247,61 + 334,43}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(247,61 - 334,43)^2 + 4 \cdot 101,66^2} = 291,02 \pm 110,54 \text{ см}^4;$$

$$J_{\max} = 401,56 \text{ см}^4; \quad J_{\min} = 180,48 \text{ см}^4.$$

Так как $J_{y_c} > J_{z_c}$, то $J_v = J_{\max}$, а $J_u = J_{\min}$.

На Рис. 3 указаны все элементы сечения, размеры в см и все оси.

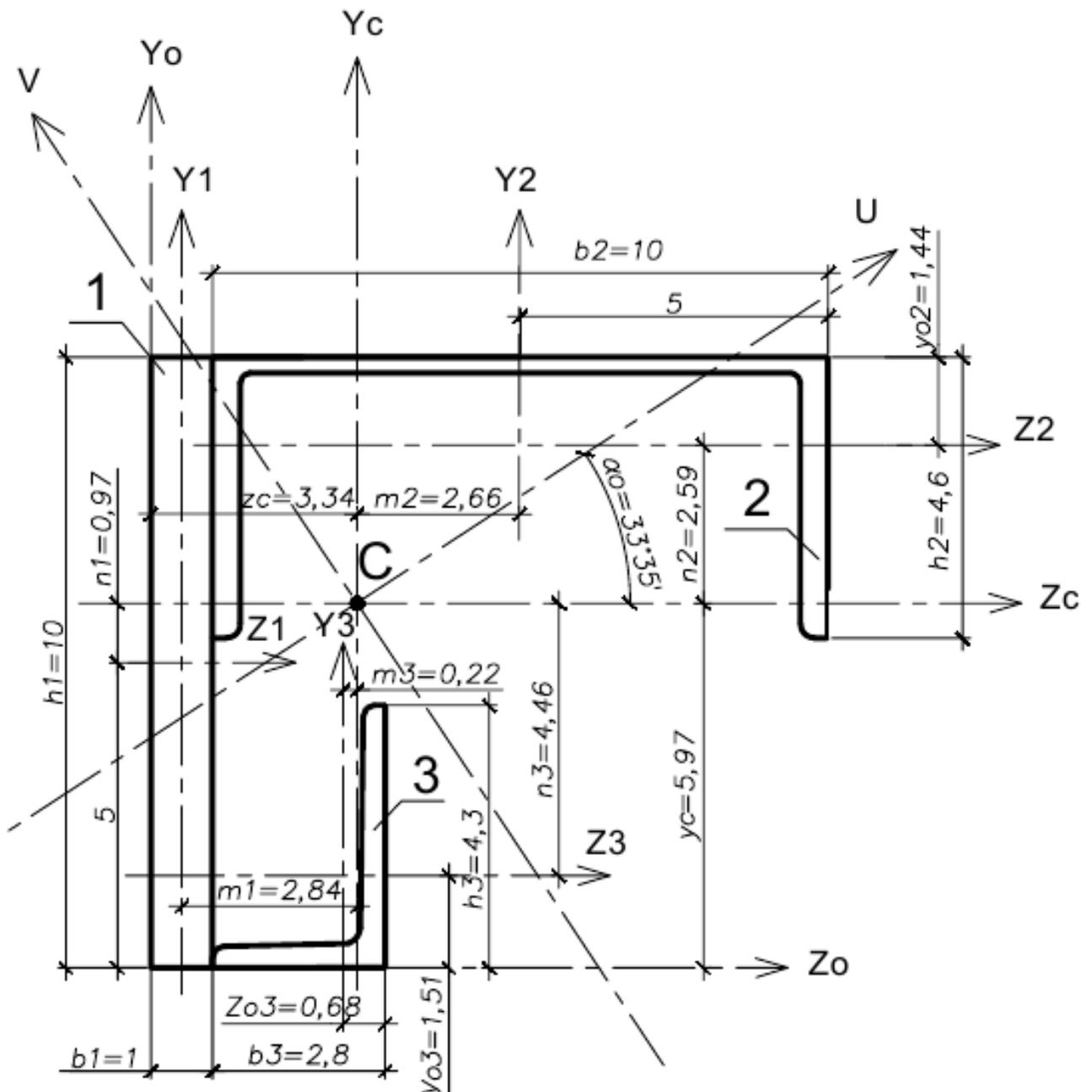


Рис. 3

Главные радиусы инерции определим по формулам:

$$i_v = \sqrt{\frac{J_{\max}}{F}} = \sqrt{\frac{401,56}{23,7}} = 4,12\text{см}; \quad i_u = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{180,48}{23,7}} = 2,76\text{см}$$

Построим эллипс инерции сечения (Рис. 4).

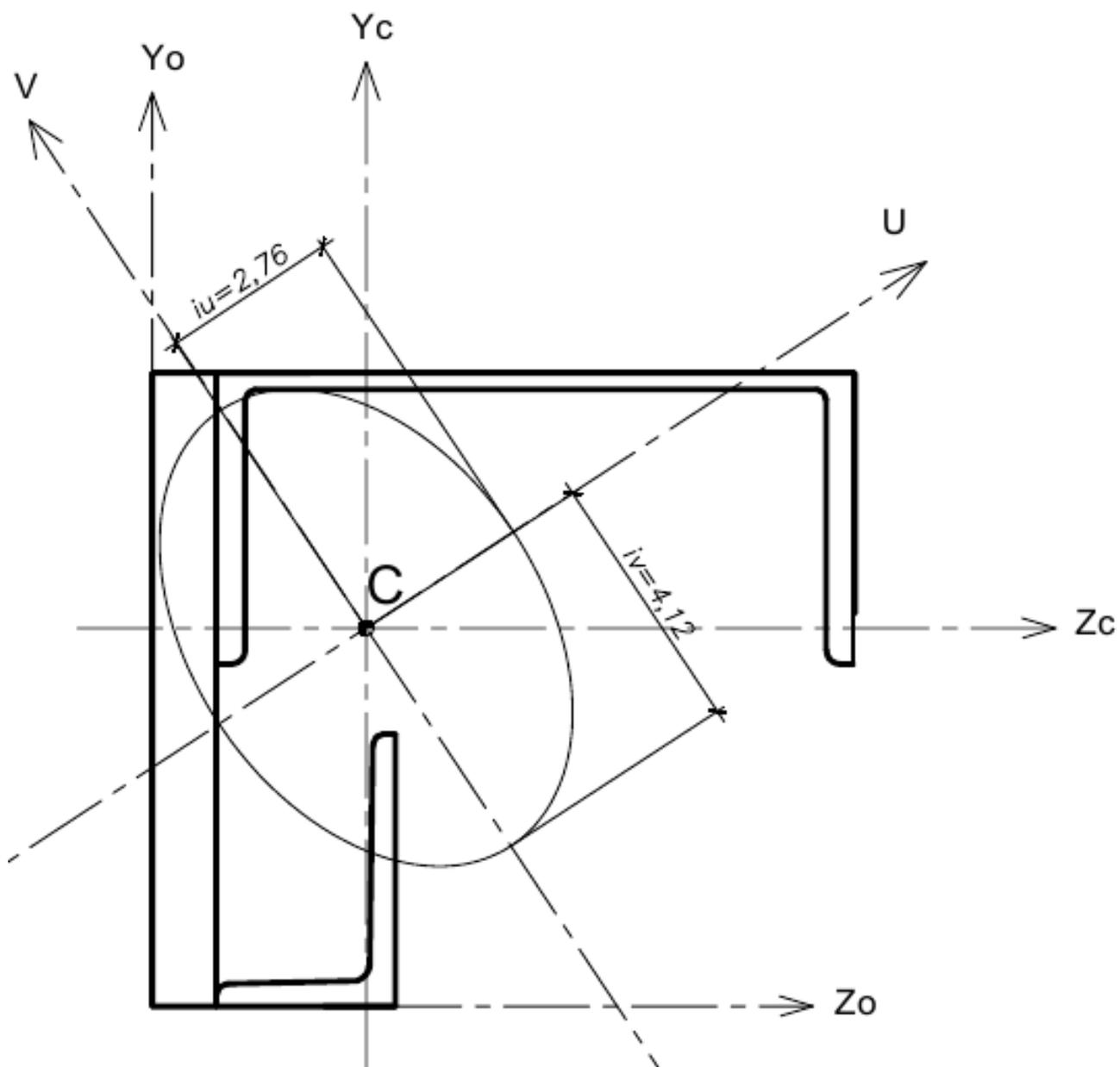


Рис. 4