ЗАДАЧА 1

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское, либо линейное напряженное состояние (рис. 1). Требуется найти:

1. Главные напряжения и направление главных напряжений.
2. Максимальные касательные напряжения.
3. Главные деформации.
4. Эквивалентное напряжение по 4 теории прочности.
5. Относительное изменение объема.
6. Удельную потенциальную энергию деформации.

Исходные данные представлены в таблице 1.

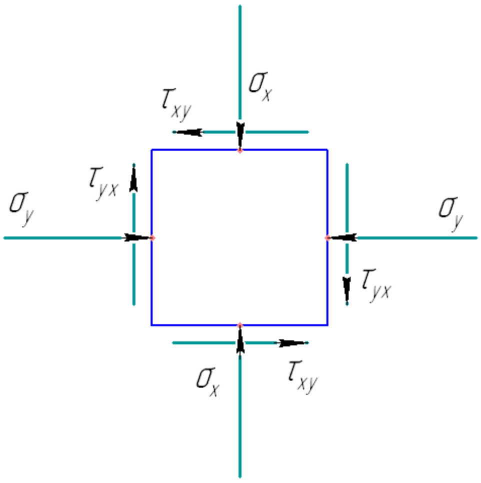

Рис. 1. Схемы напряжений

Таблица 1. Исходные данные

σ_x	σ_y	τ_{xy}
11 МПа	12 МПа	8 МПа

Решение:

Руководствуемся следующим правилом знаков для нормальных и касательных напряжений: нормальное напряжение положительно, если оно направлено по внешней нормали от плоскости сечения, то есть оно является растягивающим, а сжимающее - отрицательно. Касательное напряжение по боковой грани призмы положительно, если изображающий его вектор до совмещения с внешней нормалью следует повернуть против часовой стрелки. Исходя из этого: σ_x= - 11Мпа; σ_x= - 12Мпа; τ_{xy}= - 8Мпа;

1. Главные напряжения и направление площадок определяем по зависимости:

$$\sigma_{\text{глав}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = \frac{-11 - 12}{2} \pm \sqrt{(\frac{-11 + 12}{2})^2 + (-8)^2} =$$

$$= -11{,}5 \pm 8{,}03\text{МПа};$$

Главные напряжения обозначают σ_1 , σ_2, σ_3 и при этом индексы расставляют так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3; \quad (2)$$

В задаче рассматривается плоское напряженное состояние (Рис.1), т.е. одно из трех главных напряжений равно нулю, поэтому из формулы (1) и правила (2) следует:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = -19{,}53\text{МПа}; \qquad \sigma_2 = \sigma_{\min} = -3{,}47\text{МПа}; \qquad \sigma_3 = 0;$$

Направление главных площадок относительно заданных площадок, определяется по формуле (3):

$$\mathrm{tg}2\propto = \frac{2*\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2*(-8)}{-12+11} = 16; \quad (3), \quad \text{откуда} \quad 2\propto = 93{,}56^0; \quad \propto = 46{,}78^0;$$

Учитывая, что знак угла положительный, поворот осей осуществляется против хода часовой стрелки (Рис.2).

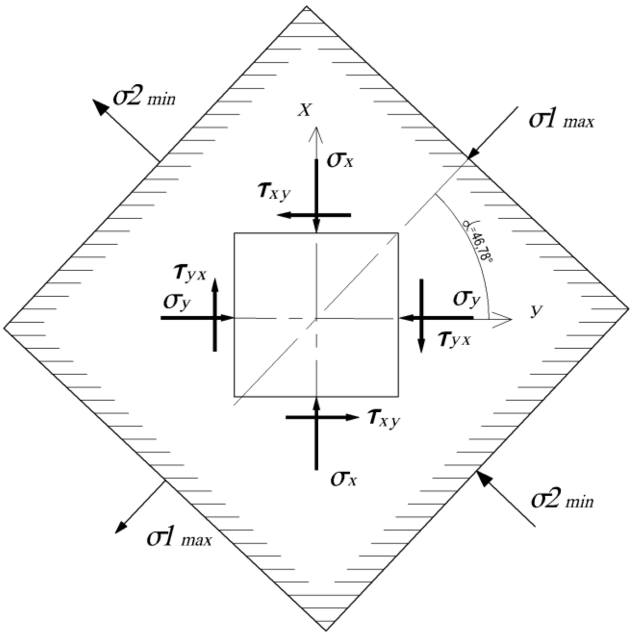

Рис.2

2. Находим максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{-19{,}53+3{,}47}{2} = -8{,}03 \text{ МПа};$$

3. Находим относительные линейные - главные деформации по главным направлениям из обобщенного закона Гука. Коэффициент Пауссона для стали $\mu \approx 0{,}3$.
Модуль упругости E = 2·105 МПа.

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{E}\,[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{0{,}2*10^5} * [\,-19{,}53 + 0{,}3 * (-3{,}47)] = -102{,}86 * 10^{-5};$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{1}{E}\,[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{0{,}2*10^5} * [\,-3{,}46 + 0{,}3 * (-19{,}53)] = -9{,}32 * 10^{-5};$$

4.Определим эквивалентное напряжение по 4 теории прочности-энергетичной.

$$\sigma_{пр}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-11-12}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-11+12}{2}\right)^2 + 3(-8)^2} = 18{,}03\text{МПа}$$

5.Найдем относительное изменение объема:

$\Theta = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y$ = (- 102,86 – 9,32) $* 10^{-5}$ = - 112,18*10^{-5}.

6. Находим удельную потенциальную энергию деформации:

$$U = \frac{1}{2E}\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 * \mu * \sigma_1 * \sigma_2) = \frac{1}{2*0{,}2*10^5}\,[(-19{,}53)^2 + (-3{,}46)^2 -$$

$$-2 * 0{,}3 * (-19{,}53) * (-3{,}46)] = 879{,}63 * 10^{-5}\text{Дж/м}^3$$