Расчет переходных процессов в линейных цепях

Исходные данные к расчету:

$R_1 = 12$ Ом;

$R_2 = 53$ Ом;

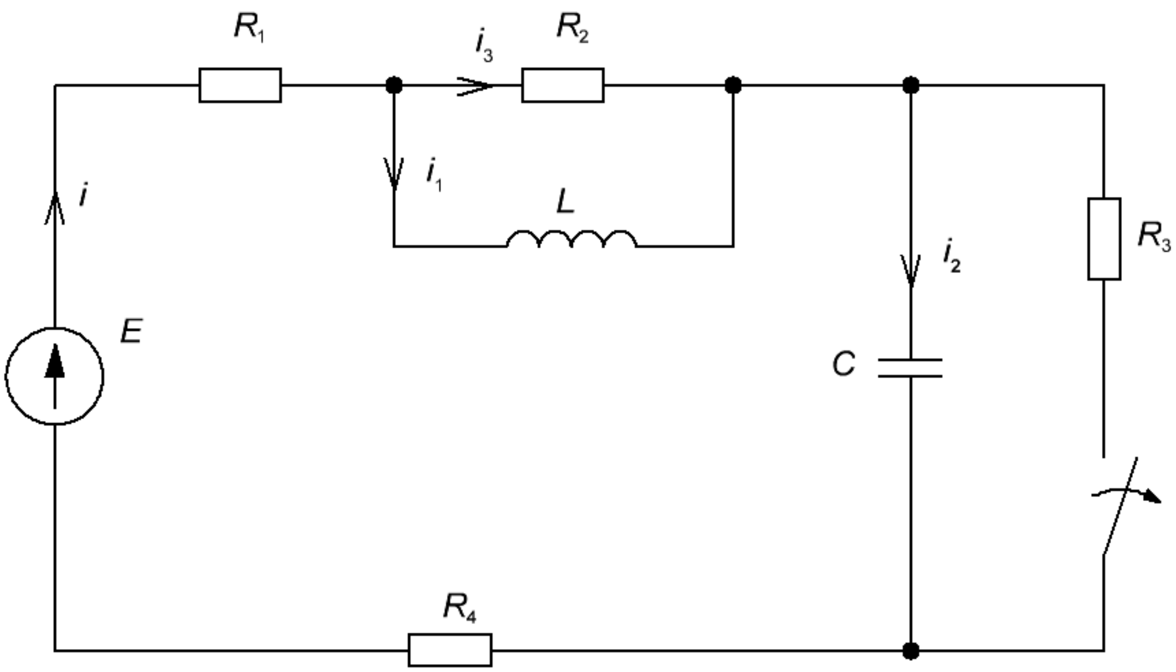
$R_3 = 28$ Ом;

$R_4 = 26$ Ом;

$E = 112$ В;

$C = 31$мкФ $= 31 \cdot 10^{-6}$ Ф;

$L = 74$ мГн $= 74 \cdot 10^{-3}$ Гн.



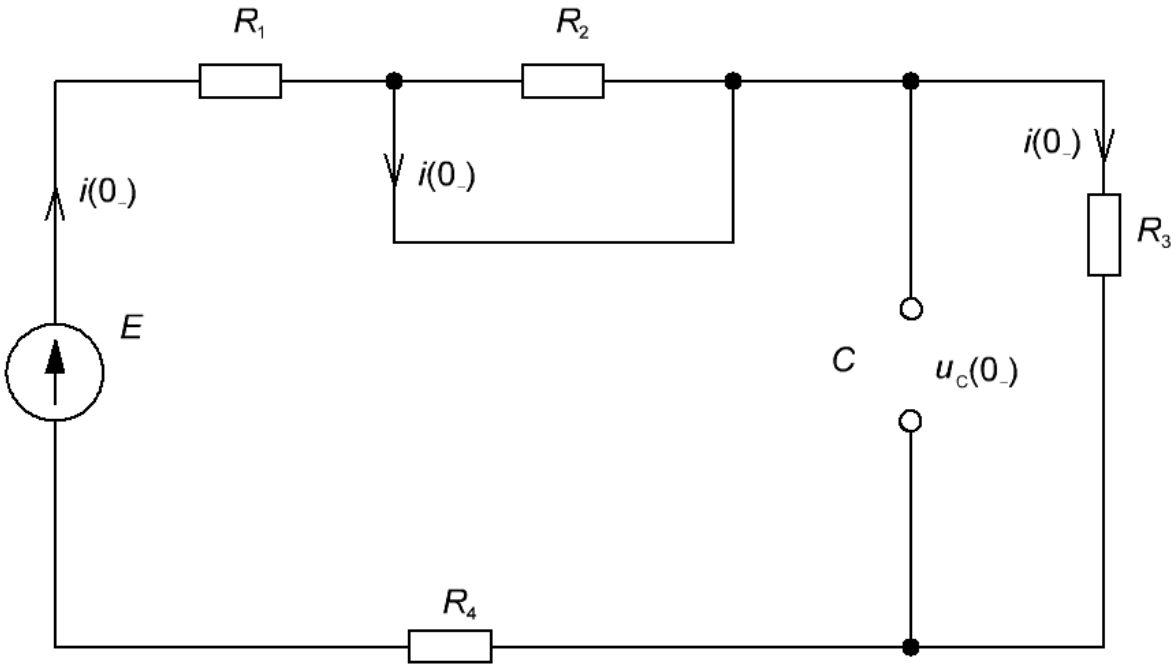
Определить: u_{R_2}.

Решение:

Расчет переходного процесса классическим методом

а) расчет режима до коммутации.

Схема, описывающая распределение токов и падений напряжения в цепи до коммутации:



До коммутации цепь является неразветвленной, ток в которой определится как:

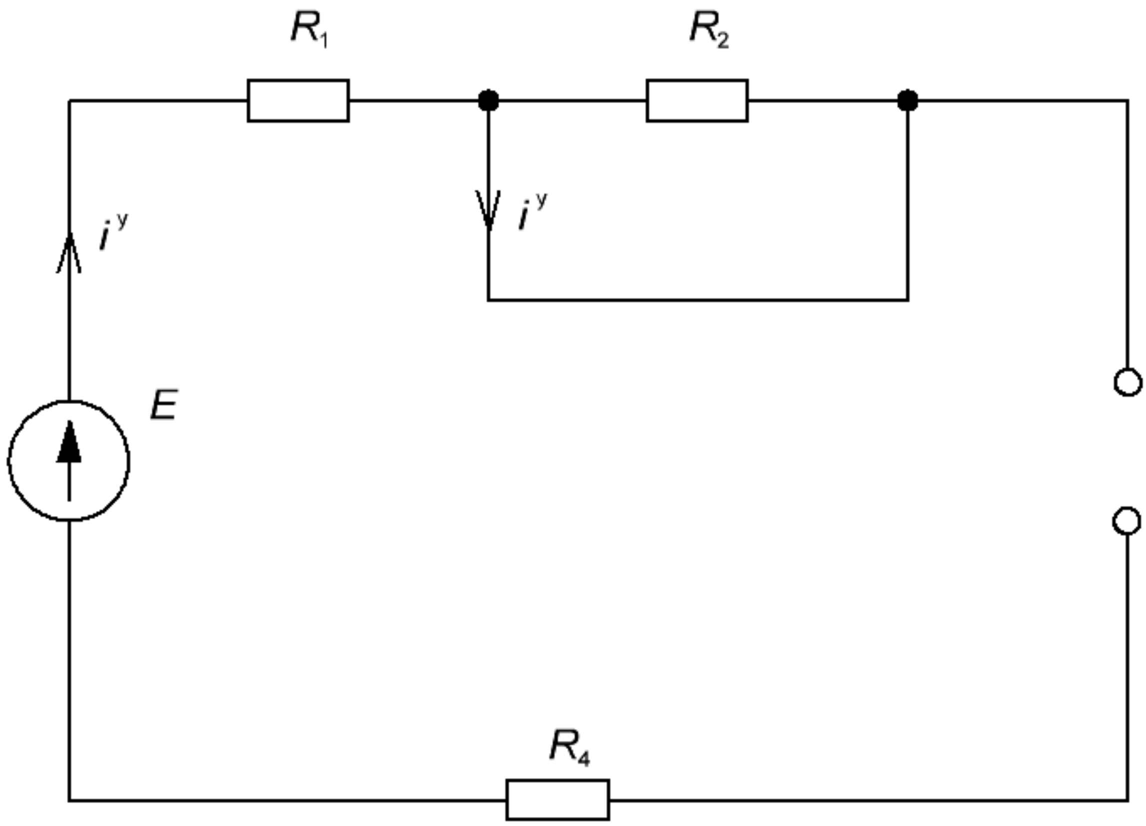
$$i\left(0_-\right) = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{112}{12 + 28 + 26} = 1,697 \text{ А};$$

Падение напряжения на конденсаторе до коммутации:

$$u_C(0_-) = i\left(0_-\right)R_4 = 1,697 \cdot 28 = 47,515 \text{ В}.$$

б) Расчет схемы после коммутации в установившемся режиме.

Схема, описывающая распределение токов и падений напряжения в цепи в установившемся режиме после коммутации:

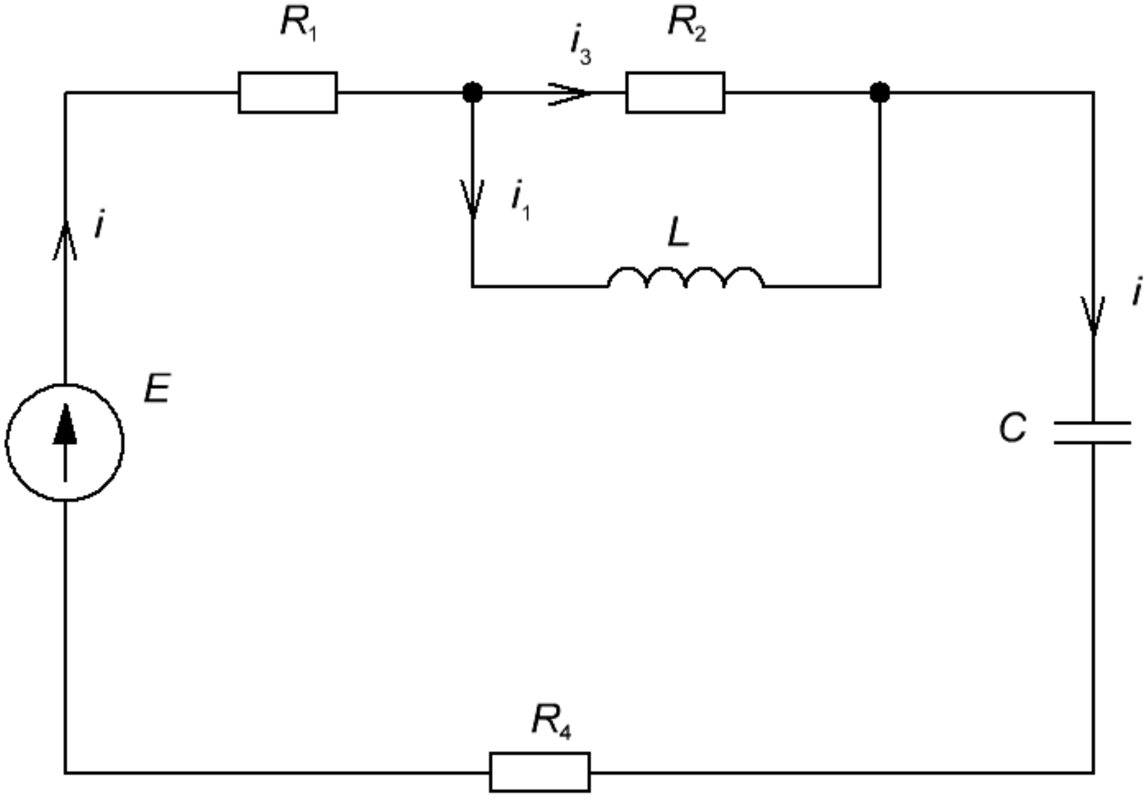


Так как в установившемся режиме тока в цепи не будет:

$u_{R_4}^{у} = 0;$

в) Определение режима переходного процесса.

Схема после коммутации до завершения переходного процесса:



Составляем характеристическое уравнение. Запишем входное сопротивление цепи относительно источника ЭДС:

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R_1 + R_4 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L};$$

Приравняем входное сопротивление к нулю и проведем замену переменной $j\omega = p$:

$$\left(R_1 + R_4\right) + \frac{1}{Cp} + \frac{R_2 Lp}{R_2 + Lp} = 0;$$

$$\left(R_1 + R_4\right)\left(R_2 + Lp\right)p + \frac{R_2 + Lp}{C} + R_2 Lp^2 = 0;$$

$$\left(R_1 + R_2 + R_4\right)Lp^2 + \left(\frac{L}{C} + R_2\left(R_1 + R_4\right)\right)p + \frac{R_2}{C} = 0;$$

$$\left(12 + 53 + 26\right) \cdot 74 \cdot 10^{-3} p^2 + \left(\frac{74 \cdot 10^{-3}}{31 \cdot 10^{-6}} + 53 \cdot \left(12 + 26\right)\right)p + \frac{53}{31 \cdot 10^{-6}} = 0;$$

$$6{,}734p^2 + 4401p + 1709677 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $p = -327 \pm j384$.

г) Записываем выражения для искомого напряжения после коммутации:

$$u_{R_2}\left(t\right)=u_{R_2}^{\text{у}}+u_{R_2}^{\text{св}}\left(t\right);$$

Вид свободной составляющей искомого напряжения согласно корням характеристического уравнения:

$$u_{R_4}^{\text{св}}\left(t\right)=e^{-327t}\left(A_1\cos\left(384t\right)+A_2\sin\left(384t\right)\right);$$

Записываем выражение для искомого напряжения и его производной:

$$\begin{cases} u_{R_2}\left(t\right)=e^{-327t}\left(A_1\cos\left(384t\right)+A_2\sin\left(384t\right)\right); \\ \dfrac{du_{R_2}\left(t\right)}{dt}=e^{-327t}\left(\left(-327A_1+384A_2\right)\cos\left(384t\right)-\left(384A_1+327A_2\right)\sin\left(617t\right)\right); \end{cases}$$

При $t=0$:

$$\begin{cases} u_{R_2}\left(0\right)=A_1; \\ \left.\dfrac{du_{R_2}}{dt}\right|_{t=0}=-327A_1+384A_2; \end{cases}$$

Составим систему дифференциальных уравнений согласно законам Кирхгофа для схемы после коммутации до завершения переходного процесса:

$$\begin{cases} i-i_1-i_3=0 \\ i\left(R_1+R_4\right)+u_{\text{C}}+u_{\text{L}}=E \quad (1) \\ i_3R_2-u_{\text{L}}=0 \end{cases}$$

Выразим величину i_3 через переменные i_1 и u_{C}:

$$\begin{cases} i-i_1-i_3=0 \\ i\left(R_1+R_4\right)+u_{\text{C}}+u_{\text{L}}=E \\ i_3R_2-u_{\text{L}}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} i\left(R_1+R_4\right)-i_1\left(R_1+R_4\right)-i_3\left(R_1+R_4\right)=0 \\ i\left(R_1+R_4\right)=E-u_{\text{C}}-u_{\text{L}} \\ u_{\text{L}}=i_3R_2 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} i\left(R_1+R_4\right)-i_1\left(R_1+R_4\right)-i_3\left(R_1+R_4\right)=0 \\ i\left(R_1+R_4\right)=E-u_{\text{C}}-i_3R_2 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E-u_{\text{C}}-i_3R_2-i_1\left(R_1+R_4\right)-i_3\left(R_1+R_4\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_3=\frac{E-u_{\text{C}}-i_1\left(R_1+R_4\right)}{R_1+R_2+R_4};$$

Получили:

$$u_{R_2}=i_3R_2=\frac{\left(E-u_\text{C}-i_1\left(R_1+R_4\right)\right)R_2}{R_1+R_2+R_4};$$

В момент времени $t=0$:

$$u_{R_2}\left(0\right)=i_3R_2=\frac{\left(E-u_\text{C}\left(0\right)-i_1\left(0\right)\left(R_1+R_4\right)\right)R_2}{R_1+R_2+R_4};$$

Согласно законам коммутации:

$i_1(0)=i(0_-)=1{,}697$ А;

$u_\text{C}(0)=u_\text{C}(0_-)=47{,}515$ В.

Тогда:

$$u_{R_2}\left(0\right)=\frac{\left(112-47{,}515-1{,}697\cdot\left(12+26\right)\right)\cdot 53}{12+53+26}=0;$$

Систему уравнений (1) запишем в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}-\dfrac{di_1}{dt}-\dfrac{di_3}{dt}=0\\ i\left(R_1+R_4\right)+u_\text{C}+L\dfrac{di_1}{dt}=E\\ i_3R_2-L\dfrac{di_1}{dt}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{di}{dt}-\dfrac{di_1}{dt}-\dfrac{di_3}{dt}=0\\ i\left(R_1+R_4\right)+u_\text{C}+i_3R_2=E\\ L\dfrac{di_1}{dt}=i_3R_2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{di}{dt}-\dfrac{di_1}{dt}-\dfrac{di_3}{dt}=0\\ \dfrac{di}{dt}\left(R_1+R_4\right)+\dfrac{i}{C}+\dfrac{di_3}{dt}R_2=0\\ L\dfrac{di_1}{dt}=i_3R_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{di}{dt}-\dfrac{di_1}{dt}-\dfrac{di_3}{dt}=0\\ \dfrac{di}{dt}\left(R_1+R_4\right)+\dfrac{i_1+i_3}{C}+\dfrac{di_3}{dt}R_2=0\\ L\dfrac{di_1}{dt}=i_3R_2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}L\left(-\dfrac{i_1+i_3}{C}-\dfrac{di_3}{dt}R_2\right)-\left(R_1+R_4\right)R_2i_3-\left(R_1+R_4\right)L\dfrac{di_3}{dt}=0\\ \left(R_1+R_4\right)\dfrac{di}{dt}=-\dfrac{i_1+i_3}{C}-\dfrac{di_3}{dt}R_2=0\\ L\dfrac{di_1}{dt}=i_3R_2\end{cases}\qquad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{L\left(i_1+i_3\right)}{C}-R_2L\frac{di_3}{dt}-\left(R_1+R_4\right)R_2i_3-\left(R_1+R_4\right)L\frac{di_3}{dt}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{di_3}{dt}=-\frac{L\left(i_1+i_3\right)+\left(R_1+R_4\right)R_2Ci_3}{\left(R_1+R_2+R_4\right)LC};$$

Тогда:

$$\frac{du_{R_2}\left(t\right)}{dt}=R_2\frac{di_3}{dt}=\frac{\left(L\left(i_1+i_3\right)+\left(R_1+R_4\right)R_2Ci_3\right)R_2}{\left(R_1+R_2+R_4\right)LC};$$

В момент времени $t=0$:

$$\left.\frac{du_{R_2}\left(t\right)}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{\left(L\left(i_1\left(0\right)+i_3\left(0\right)\right)+\left(R_1+R_4\right)R_2Ci_3\left(0\right)\right)R_2}{\left(R_1+R_2+R_4\right)LC}=$$

$$=-\frac{\left(74\cdot10^{-3}\cdot\left(1,697+0\right)+\left(12+26\right)\cdot53\cdot31\cdot10^{-6}\cdot0\right)\cdot53}{\left(12+53+26\right)\cdot74\cdot10^{-3}\cdot31\cdot10^{-6}}=-31882,667\,\frac{\text{В}}{\text{с}};$$

д) Находим постоянные интегрирования:

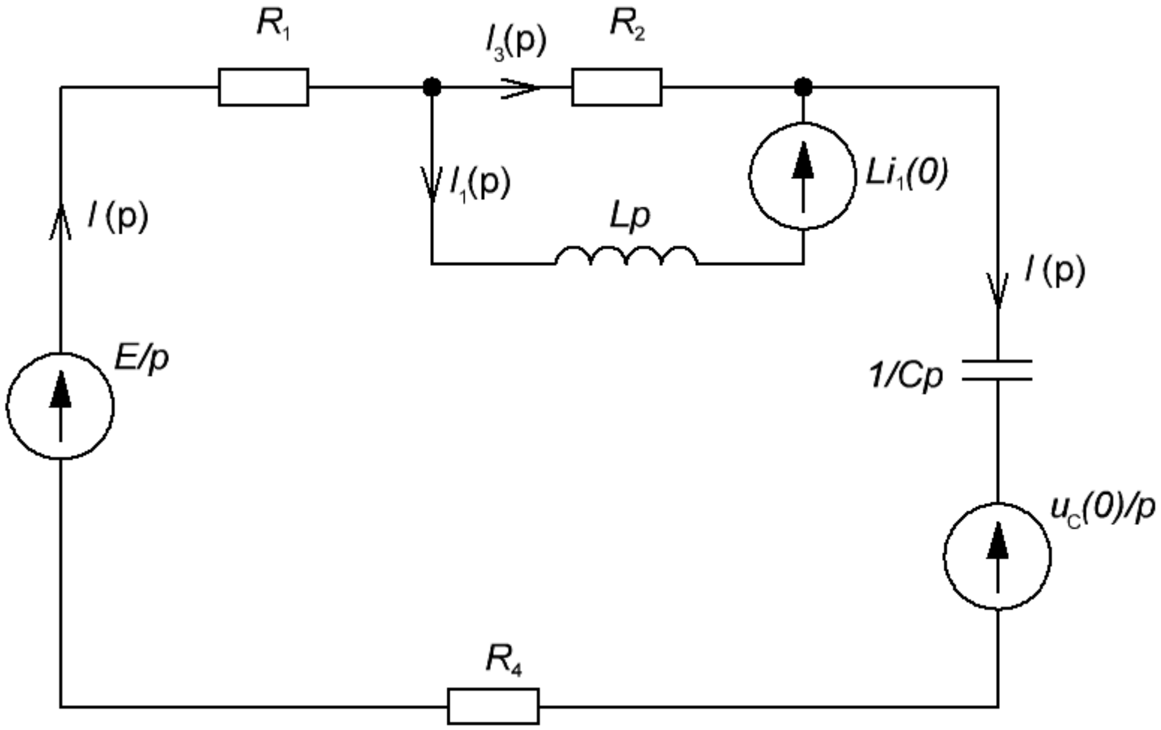
$$\begin{cases}A_1=0;\\-327A_1+384A_2=-31882,667;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_1=0;\\A_2=-\dfrac{31882,667}{384}=-83,028;\end{cases}$$

Окончательно получим:

$$u_{R_2}\left(t\right)=e^{-327t}\left(0\cdot\cos\left(384t\right)-83,028\sin\left(384t\right)\right)=$$
$$=-83,028e^{-327t}\sin\left(384t\right).$$

Расчет переходного процесса операторным методом

а) Составим операторную схему замещения цепи:



Запишем систему уравнений согласно законам Кирхгофа и решим её относительно $I_3(p)$ методом исключения переменных:

$$\begin{cases} I(p) - I_1(p) - I_3(p) = 0 \\ I(p)\left(R_1 + R_4 + \dfrac{1}{Cp}\right) + I_3(p) R_2 = \dfrac{E}{p} - \dfrac{u_C(0)}{p} \Rightarrow \\ I_3(p) R_2 - I_1(p) Lp = -Li_1(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(p)Lp\left(R_1 + R_4 + \dfrac{1}{Cp}\right) - I_1(p)Lp\left(R_1 + R_4 + \dfrac{1}{Cp}\right) - I_3(p)Lp\left(R_1 + R_4 + \dfrac{1}{Cp}\right) = 0 \\ I(p)\left(R_1 + R_4 + \dfrac{1}{Cp}\right) = \dfrac{E - u_C(0)}{p} - I_3(p) R_2 \\ I_1(p) Lp = I_3(p) R_2 + Li_1(0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{E-u_C(0)}{p}-I_3(p)R_2\right)Lp-\left(I_3(p)R_2+Li_1(0)\right)\left(R_1+R_4+\frac{1}{Cp}\right)-$$

$$-I_3(p)Lp\left(R_1+R_4+\frac{1}{Cp}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3(p)=\frac{-Li_1(0)\left(R_1+R_4+\frac{1}{Cp}\right)+\left(E-u_C(0)\right)L}{R_2Lp+R_2\left(R_1+R_4+\frac{1}{Cp}\right)+Lp\left(R_1+R_4+\frac{1}{Cp}\right)}=$$

$$=\frac{\left(E-u_C(0)-i_1(0)\left(R_1+R_4\right)\right)Lp-\frac{Li_1(0)}{C}}{\left(R_1+R_2+R_4\right)Lp^2+\left(\frac{L}{C}+R_2\left(R_1+R_4\right)\right)p+\frac{R_2}{C}}=$$

$$=\frac{\left(112-47{,}515-1{,}697\cdot(12+26)\right)\cdot 74\cdot 10^{-3}p-\frac{74\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}697}{31\cdot 10^{-6}}}{(12+53+26)\cdot 74\cdot 10^{-3}p^2+\left(\frac{74\cdot 10^{-3}}{31\cdot 10^{-6}}+53\cdot(12+26)\right)p+\frac{53}{31\cdot 10^{-6}}}=$$

$$=-\frac{4050}{6{,}734p^2+4401p+1709677};$$

Тогда согласно закону Ома в операторной форме:

$$U_{R_2}(p)=I_3(p)R_2=-\frac{4050}{6{,}734p^2+4401p+1709677}\cdot 53=$$

$$=-\frac{214697}{6{,}734p^2+4401p+1709677};$$

Для нахождения оригинала применим формулу разложения:

$$\frac{d}{dp}\left(6{,}734p^2+4401p+1709677\right)=13{,}468p+4401;$$

$$u_{R_2}(t)=-2\,\mathrm{Re}\left(\frac{214697}{13{,}468\cdot(-327+j384)+4401}e^{(-327+j384)t}\right)=$$

$$=-2e^{-327t}\,\mathrm{Re}\left(-j41{,}514\left(\cos(384t)+j\sin(384t)\right)\right)=$$

$$=-2e^{-327t}\cdot 41{,}514\sin(384t)=-83{,}028e^{-327t}\sin(384t).$$

Ответ: $u_{R_2}(t)=-83{,}028e^{-327t}\sin(384t)$.

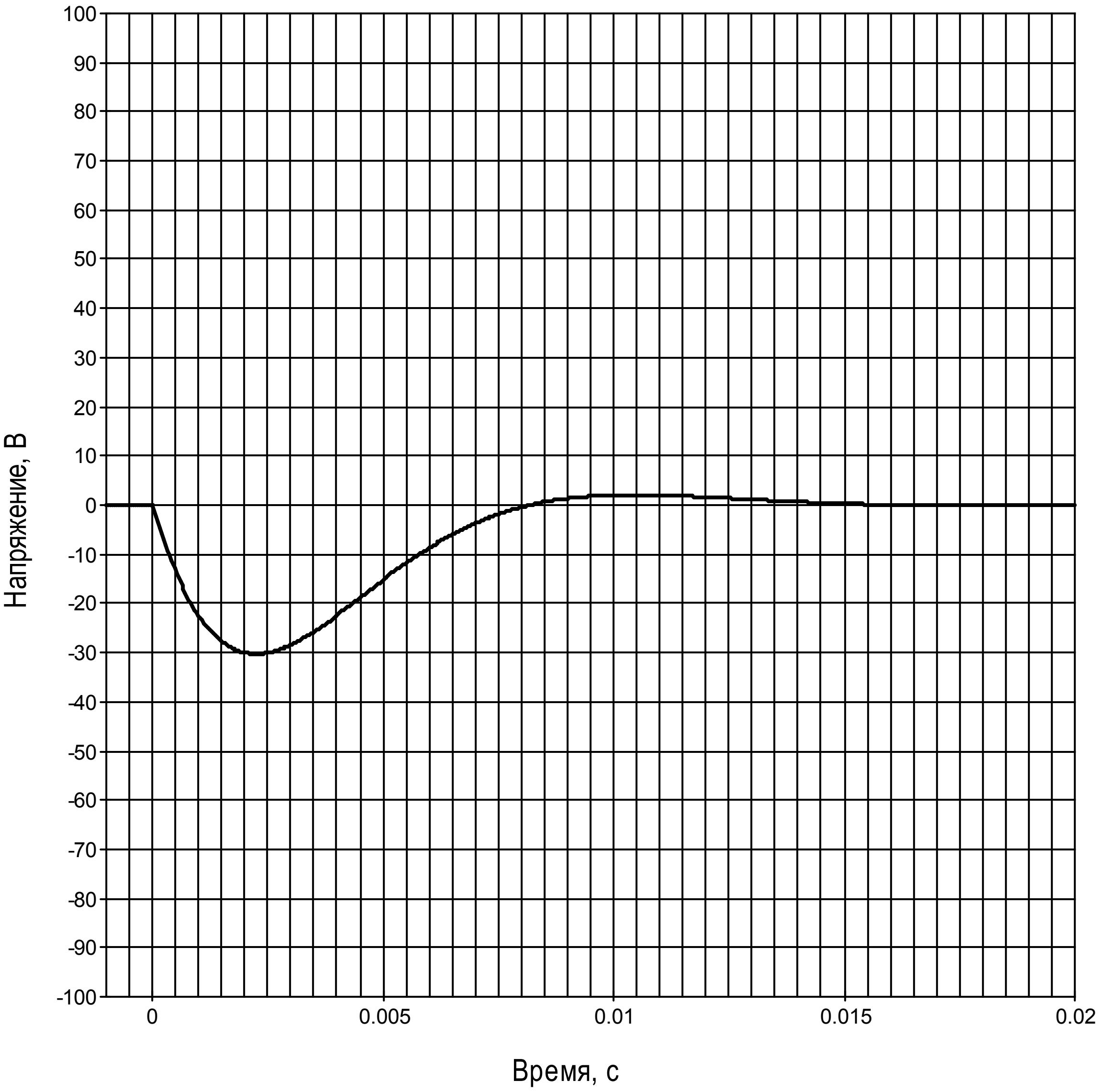


График изменения напряжения на сопротивлении R_2