Задание №1

$\left(x+2y\right)dx - xdy = 0;$

$\left(x+2y\right)dx = xdy;$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x};$

Это однородное уравнение.

Применим подстановку $\frac{y}{x} = z; \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx};$

$z + x\frac{dz}{dx} = 1 + 2z;$

$x\frac{dz}{dx} = 1 + z;$

Разделяем переменные и интегрируем:

$\int\frac{dz}{1+z} = \int\frac{dx}{x};$

$\ln\left|1+z\right| = \ln\left|x\right| + \ln C;$

$1 + z = Cx;$

Применим обратную подстановку:

$1 + \frac{y}{x} = Cx;$

$x + y = Cx^2;$

$y = Cx^2 - x.$

Ответ: $y = Cx^2 - x.$

Задание №2

$\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0;$

Проверим, является ли левая часть уравнения полным дифференциалом:

$P(x,y)=1+y^2\sin 2x=1+2y^2\sin x\cos x;\ \dfrac{dP}{dy}=\dfrac{d}{dy}\left(1+2y^2\sin x\cos x\right)=$

$=4y\sin x\cos x;$

$Q(x,y)=-2y\cos^2 x;\ \dfrac{dQ}{dx}=\dfrac{d\left(-2y\cos^2 x\right)}{dx}=-2y\cdot 2\cos x\cdot\left(\cos x\right)'=4y\sin x\cos x;$

$\dfrac{dP}{dy}=\dfrac{dQ}{dx}\Rightarrow$ это уравнение в полных дифференциалах, следовательно:

$du=\left(1+2y^2\sin x\cos x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0;$

$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(1+2y^2\sin x\cos x\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(-2y\cos^2 x_0\right)dy=$

$=\int\limits_{x_0}^{x}dx+2y^2\int\limits_{x_0}^{x}\cos xd\left(-\cos x\right)-2\cos^2 x_0\int\limits_{y_0}^{y}ydy=$

$=x\Big|_{x_0}^{x}-2y^2\cdot\dfrac{\cos^2 x}{2}\Bigg|_{x_0}^{x}-2\cos^2 x_0\cdot\dfrac{y^2}{2}\Bigg|_{y_0}^{y}=$

$=x\Big|_{x_0}^{x}-y^2\cdot\cos^2 x\Big|_{x_0}^{x}-\cos^2 x_0\cdot y^2\Big|_{y_0}^{y}=$

$=x-x_0-y^2\cdot\cos^2 x+y^2\cdot\cos^2 x_0-\cos^2 x_0y^2+y_0{}^2\cos^2 x_0=$

$=x-y^2\cos^2 x=C_1+x_0-\cos^2 x_0y_0{}^2;$

Принимаем:

$C_1+x_0-y_0{}^2\cos^2 x_0=C;$

Ответ: $x-y^2\cos^2 x=C.$

Задание №4

$xy' - y = \ln y';$

Решим уравнение относительно x :

$$x = \frac{\ln y' + y}{y'};$$

Применим подстановку $p = y'$:

$$x = \frac{\ln p + y}{p} \quad (1);$$

$$dy = pdx = pd\left(\frac{\ln p + y}{p}\right) = p\left(\frac{\ln p + y}{p}\right)'_p dp + p\left(\frac{\ln p + y}{p}\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\frac{1}{p} \cdot p - (\ln p + y) \cdot 1}{p} dp + p \cdot \frac{1}{p} dy = \frac{1 - \ln p - y}{p} dp + dy \Rightarrow \frac{1 - \ln p - y}{p} dp = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = C; \\ y = 1 - \ln p. \end{cases}$$

Подставим $y = 1 - \ln p$ в уравнение (1):

$$x = \frac{\ln p + 1 - \ln p}{p} = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \int \frac{dx}{x} = \ln x;$$

$$p = C \Rightarrow y' = C \Rightarrow y = Cx + C_1;$$

Подставим в уравнение (1), учитывая, что $p = C$:

$$x = \frac{\ln C + Cx + C_1}{C} \Leftrightarrow \ln C + C_1 = C \Leftrightarrow C_1 = C - \ln C.$$

Ответ: $y = \begin{cases} \ln x; \\ Cx + C - \ln C. \end{cases}$.

Задание №5

$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x};$

Найдем решение однородного уравнения:

$y'' - 5y' + 4y = 0;$

$k^2 - 5k + 4 = 0;$

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 9;$

$k_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1;$

$k_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4.$

$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{4x};$

Правая часть уравнения имеет специальный вид $f(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{ax}$,

в свою очеред $a \neq 1$ и $a \neq 4$, следовательно:

$\tilde{y} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{2x};$

$\tilde{y}' = \left(2Ax + B\right)e^{2x} + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{2x} = \left(2Ax^2 + \left(2A + 2B\right)x + B + 2C\right)e^{2x};$

$\tilde{y}'' = \left(4Ax + 2A + 2B\right)e^{2x} + \left(2Ax^2 + \left(2A + 2B\right)x + B + 2C\right)e^{2x} =$

$= \left(2Ax^2 + \left(4A + 2B\right)x + 2A + 3B + 2C\right)e^{2x};$

Подставим в исходное уравнение:

$\tilde{y}'' + 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = e^{-x};$

$\left(2Ax^2 + \left(4A + 2B\right)x + 2A + 3B + 2C\right)e^{2x} - 5\left(2Ax^2 + \left(2A + 2B\right)x + B + 2C\right)e^{2x} +$

$+4\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{2x} = 4x^2 e^{2x};$

$-4Ax^2 + \left(-2A - 4B\right)x + 2A - 2B - 4C = 4x^2;$

По методу сравнения коэффициентов:

$-4A = 4 \Rightarrow A = -1;$

$-2A - 4B = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{2A}{4} = -\dfrac{2 \cdot (-1)}{4} = \dfrac{1}{2};$

$2A - 2B - 4C = 0 \Rightarrow C = \dfrac{2A - 2B}{4} = \dfrac{2 \cdot (-1) - 2 \cdot \dfrac{1}{2}}{4} = -\dfrac{3}{4}.$

Получили:

$\tilde{y} = \left(-x^2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2x};$

Тогда искомое решение:

$$y = y_o + \tilde{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + \left(-x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{2x};$$

Ответ:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + \left(-x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{2x}.$$