**Задание 1**. Вычислить пределы функций.

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+x+4}$ б) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{4x+4}$

**Решение**. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов. Разделим числитель и знаменатель на самую высокую входящую в них степень переменной.

а) Самая высокая степень есть $x^3$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\frac{1+0-0}{5-0+0+0}=\frac{1}{5}$$

б) Самая высокая степень есть $x$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{4x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{4}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2-2}{x^2}}}{4+\frac{4}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}{4+\frac{4}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{4+\frac{4}{x}}=\frac{\sqrt{3+0}}{4+0}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

**Задание 2**. Вычислить пределы функций.

а) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$ б) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}$

**Решение.** а) При подстановке в дробь $x=3$ получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Следовательно, нужно выделить критический множитель $(x-2)$ в числителе и в знаменателе и сократить на него. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{3x+2}=\frac{2-1}{3\cdot 2+2}=\frac{2-1}{6+2}=\frac{1}{8}$$

б) При подстановке в дробь $x=0$ получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Необходимо избавиться от иррациональности. Критический множитель получим умножением числителя и знаменателя на произведение выражений, являющееся сопряженными числителю, т.е. на $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2}=\frac{3\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}{2}=\frac{3(1+1)}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3$$

в) При подстановке в дробь $x=0$ получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Необходимо избавиться от иррациональности. Критический множитель получим умножением числителя и знаменателя на произведение выражений, являющееся сопряженными числителю, т.е. на $\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)$. Используем замечательный предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}{\left(\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}\right)\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}{\left(\sqrt{4+3x}\right)^2-\left(\sqrt{4-3x}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}{4+3x-(4-3x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}{4+3x-4+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}{2\cdot 3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\sqrt{4+3\cdot 0}+\sqrt{4-3\cdot 0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot(2+2)=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

**Задание 3.** Вычислить предел функции.

$$\lim_{x\to\infty}(2x+4)(\ln(3x+1)-\ln(3x+2))$$

**Решение.** Используем свойства предела, логарифма $\left(\ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y}; \ln x^{\alpha} = \alpha \ln x\right)$ и замечательный предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$=e

$$\lim_{x\to\infty}(2x+4)(\ln(3x+1)-\ln(3x+2)) = \lim_{x\to\infty}(2x+4)\ln\frac{3x+1}{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{2x+4} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x+2-1}{3x+2}\right)^{2x+4} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{3x+2}\right)^{2x+4} =$$

$$= \ln\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x+2}\right)^{2x+4} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3x+2}\right)^{-3(2x+4)}\right)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(3x+2)}\right)^{-6x-12}\right)^{-\frac{1}{3}} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(3x+2)}\right)^{-6x-4-8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(3x+2)}\right)^{-2(3x+2)}\left(1+\frac{1}{-(3x+2)}\right)^{-8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(3x+2)}\right)^{-2(3x+2)}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(3x+2)}\right)^{-8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-2(3x+2)}\right)^{-(3x+2)}\right)^{2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2(3x+2)}\right)^{-8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \ln(e^{2}\cdot(1)^{-8})^{-\frac{1}{3}} = \ln(e^{2})^{-\frac{1}{3}} = \ln e^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}\ln e = -\frac{2}{3}$$

**Задание 4**. Вычислить пределы функций

а)$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$; б) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{2}-3x+2}-\sqrt{x^{2}+2x}\right)$.

**Решение**. а) Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Необходимо избавиться от иррациональности. Критический множитель получим умножением числителя и знаменателя на выражение, позволяющее получить в числителе разность кубов, т.е. $\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x(x+1)} - \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x(x+1)} - \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x(x+1)} - \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

б) Имеем неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Необходимо избавиться от иррациональности. Критический множитель получим умножением числителя и знаменателя на выражение, являющееся сопряженными числителю, т.е. $\left(\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2+2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2+2x}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}\right)}{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2-\left(x^2+2x\right)}{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2+2x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2-x^2-2x}{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+2}{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}}$$

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов. Разделим числитель и знаменатель на самую высокую входящую в них степень переменной $x$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x+2}{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{5x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+2x}}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(x^2-3x+2\right)} + \sqrt{\frac{1}{x^2}\left(x^2+2x\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = \frac{-5}{\sqrt{1-0+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}$$

**Задание 5**. Функция $y = f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной.

Найти и классифицировать точки разрыва функции, если они существуют. Построить график функции.

$$y = \begin{cases} x, x \le -1, \\ \frac{1}{2}, -1 < x \le \frac{\pi}{6}, \\ \sin x\,,\ x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

**Решение.** Данная функция существует при всех значениях $x$ и является кусочно-аналитической. Исследуем "поведение" этой функции вблизи точек $x = -1$ и $x = \frac{\pi}{6}$, где аналитическое выражение функции изменяется.

Вычислим односторонние пределы в точке $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1} x = -1$$

$$\lim_{x \to -1+0} y = \lim_{x \to -1} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Так как $\lim_{x \to -1-0} y \neq \lim_{x \to -1+0} y$, следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет разрыв первого рода.

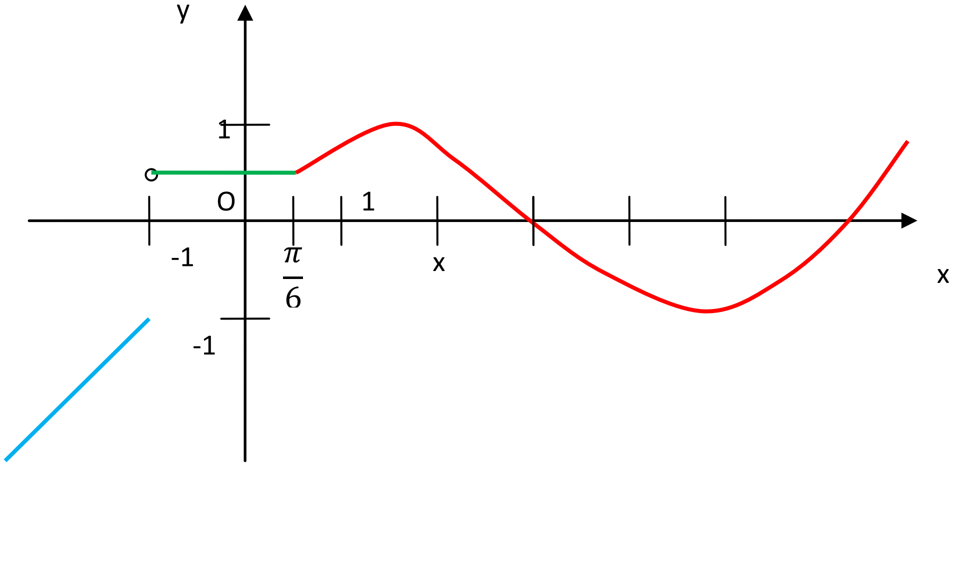
Вычислим односторонние пределы в точке $x = \frac{\pi}{6}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}-0} y = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}+0} y = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Так как $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}-0} y = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}+0} y$, следовательно, функция в точке $x = \frac{\pi}{6}$ функция непрерывна.

Построим график функции.



**Задание 6.** Найти производные функции.

а) $y = \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7\sqrt{x}}{8} + \frac{1}{x^4}$;   б) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

в) $y = \frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}$

**Решение.** а) Функция представляет собой сумму других функций, применяем соответствующую формулу дифференцирования, получим

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7\sqrt{x}}{8} + \frac{1}{x^4}\right)' = \left(6x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}} + \frac{7}{8}x^{\frac{1}{2}} + x^{-4}\right)' =$$

$$= \left(6x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(4x^{-\frac{2}{3}}\right)' + \left(\frac{7}{8}x^{\frac{1}{2}}\right)' + (x^{-4})' = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot\ x^{-\frac{1}{2}-1} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} +$$

$$+\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot\ x^{\frac{1}{2}-1} + (-4)x^{-4-1} = -3\, x^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{7}{16}x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-5} = -\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}} +$$

$$+\frac{7}{16x^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{x^5} = -\frac{3}{x\sqrt{x}} + \frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{16\sqrt{x}} - \frac{4}{x^5}$$

б) Функция представляет собой произведение двух функций, каждая из которых является сложной. Применяя соответствующие формулы дифференцирования, получим

$$\frac{dy}{dx} = \left(2^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \left(2^{\sin x}\right)' \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2^{\sin x}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2^{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos 4x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2^{\sin x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cos 4x \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{2^{\sin x - 1}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

в) Функция представляет собой частное двух функций, являющихся сложными. Применяя соответствующие формулы дифференцирования, получим

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}\right)' = \frac{(1-\cos 4x)'(1+\cos 4x) - (1-\cos 4x) \cdot (1+\cos 4x)'}{(1+\cos 4x)^2} =$$

$$= \frac{-(-\sin 4x) \cdot (4x)'(1+\cos 4x) - (1-\cos 4x) \cdot (-\sin 4x) \cdot (4x)'}{(1+\cos 4x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin 4x\,(1+\cos 4x) + 4\sin 4x\,(1-\cos 4x)}{(1+\cos 4x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin 4x\,(1+\cos 4x + 1 - \cos 4x)}{(1+\cos 4x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin 4x \cdot 2}{(1+\cos 4x)^2} = \frac{8\sin 4x}{(1+\cos 4x)^2}$$

**Задание 7.** Найти производные неявной функции и функции, заданной параметрически.

а) $3x^3y^2 - 2x^4 + 7y^3 - 4 = 0$; б) $\begin{cases} x = e^t \\ y = 1 + e^{2t} \end{cases}$.

**Решение**: а) Для нахождения $\frac{dy}{dx}$ неявной функции дифференцируем данное выражение по *x*. Учитывая, что *y* есть функция от *x*, имеем:

$$3 \cdot 3x^2y^2 + 3 \cdot 2x^3yy' - 2 \cdot 4x^3 + 7 \cdot 3y^2y' = 0$$

$$9x^2y^2 + 6x^3yy' - 8x^3 + 21y^2y' = 0$$

$$y'(6x^3y + 21y^2) + 9x^2y^2 - 8x^3 = 0$$

$$y'(6x^3y + 21y^2) = -9x^2y^2 + 8x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9x^2y^2 + 8x^3}{6x^3y + 21y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2y^2 - 8x^3}{6x^3y + 21y^2}$$

б) Производная параметрически заданной функции есть $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$

Найдем $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(e^t)}{dt} = e^t;$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(1+e^{2t})}{dt} = 2e^{2t}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t}}{e^t} = 2e^t$$

**Задание 8**. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой $x$.

$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - x,\ x = 1.$

**Решение.** Уравнение касательной к кривой в заданной точке имеет вид

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

$y_0 = y(x_0) = y(1) = 3 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 1 = 3 + 4 - 12 - 1 = -6$

$y' = (3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - x)' = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 1 = 12x^3 + 12x^2 -$
$-24x - 1;$

$y_0' = y'(x_0) = y'(1) = 12 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 - 1 = 12 + 12 - 24 - 1 = -1$

Подставляя, полученные значения в уравнение, получим

$$y - (-6) = -1(x - 1)$$
$$y + 6 = -x + 1$$
$$y = -x - 5$$

Уравнение нормали к кривой в заданной точке имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$$
$$y - (-6) = (x - 1)$$
$$y + 6 = x - 1$$
$$y = x - 7$$

**Задание 9**. Найти предел функции по правилу Лопиталя.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$

**Решение**. Полагая $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, имеем $\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)$. Далее

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \ln(\sin x) : \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} \right)$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{(\ln(\sin x))'}{(\operatorname{ctg} x)'} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \sin x) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 0 \cdot 1 = 0$$

Отсюда

$$\lim_{x \to 0} y = e^0 = 1$$