Задача 12

Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Начальная скорость υ_0 точки равна 3 м/с, тангенциальное ускорение $a_\tau = 1$ м/с^2. Для момента времени $t = 2$ с определить полное ускорение точки.

Дано: $R = 4$ м, $\upsilon_0 = 3$ м/с, $a_\tau = 1$ м/с^2, $t = 2$ с.

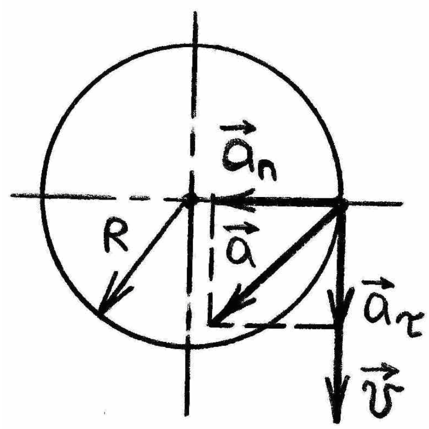
Найти: a.

Решение:

Полное ускорение точки при движении по окружности: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$,

где a_n − нормальное ускорение точки, $a_n = R \cdot \omega^2$;

ω − угловое ускорение точки, $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$.



Угловая скорость точки при равноускоренном вращении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \text{ или } \omega = \frac{\upsilon_0}{R} + \varepsilon \cdot t,$$

где ε − угловое ускорение точки, $\varepsilon = \dfrac{a_\tau}{R}$.

Находим полное ускорение точки при $t = 2$ с:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + (R \cdot \omega^2)^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left[R \cdot \omega^2\right]^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left[R \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{R} + \varepsilon \cdot t\right)^2\right]^2},$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + \left[R \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{R} + \frac{a_\tau}{R} \cdot t\right)^2\right]^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left[\frac{\left(\upsilon_0 + a_\tau \cdot t\right)^2}{R}\right]^2},$$

$$a = \sqrt{1^2 + \left[\frac{\left(3 + 1 \cdot 2\right)^2}{4}\right]^2} = 6{,}33 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 6{,}33$ м/с^2.

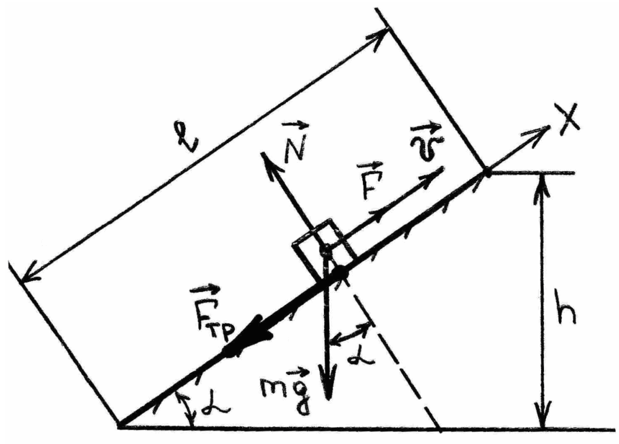
Задача 32

На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{\text{тр}}$, равная 0,1 действующей на него силы тяжести mg. Найти силу тяги F, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

Дано: $m = 1 \text{ т} = 10^3 \text{ кг}$, $F_{\text{тр}} = 0{,}1 \cdot mg$, $h = 1$ м, $l = 25$ м.

Найти: F.

Решение:



Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X:

$F_X - F_{\text{тр}\,X} - m \cdot g_X = m \cdot a_X$ или $F - F_{\text{тр}} - m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0$ (1),

где $a_X = a$ − ускорение автомобиля, $a = 0$ (так как скорость автомобиля постоянна);

α − угол наклона поверхности горы, $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$;

$g = 9{,}81$ м/с^2 − ускорение свободного падения.

Из выражения (1) находим силу тяги:

$$F = F_{\text{тр}} + m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0{,}1 \cdot mg + m \cdot g \cdot \frac{h}{l} = m \cdot g \cdot \left(0{,}1 + \frac{h}{l}\right),$$

$$F = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}1 + \frac{1}{25}\right) = 1373{,}4 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 1373{,}4$ Н.

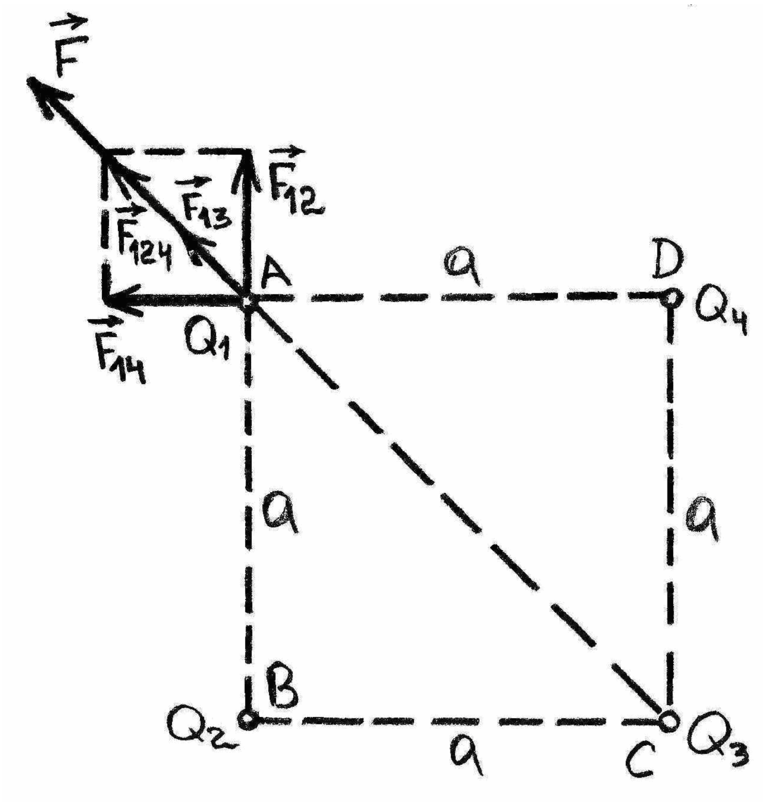
Задача 5

Четыре одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$ нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Найти силу F, действующую на один из этих зарядов со стороны остальных трёх.

<u>Дано:</u> $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$ нКл $= 40 \cdot 10^{-9}$ Кл, $a = 10$ см $= 0{,}1$ м.

<u>Найти:</u> F.

Решение:



Напряжённость в точке С находим по принципу суперпозиции:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \text{ или } \vec{F} = \vec{F}_{124} + \vec{F}_{13} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{13} \quad (1),$$

где $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{14}$, $\vec{F}_{13}$ − силы, действующие на заряд Q_1 со стороны зарядов Q_2, Q_3, Q_4;

$$F_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (AB)^2}, \; F_{13} = \frac{Q_1 \cdot Q_3}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (AC)^2}, \; F_{14} = \frac{Q_1 \cdot Q_4}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (AD)^2},$$

ε − диэлектрическая проницаемость (так как среда не задана, то принимаем $\varepsilon = 1$);

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м − электрическая постоянная;

$AB = AD = a = 0{,}1$ м и $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(a)^2 + (a)^2} = a \cdot \sqrt{2} = 0{,}1 \cdot \sqrt{2}$ м.

Учитывая, что ABCD – квадрат и $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q$, получим:

$$F_{124} = \sqrt{F_{12}^2 + F_{14}^2} = \sqrt{\left(\frac{Q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (AB)^2}\right)^2 + \left(\frac{Q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (AD)^2}\right)^2},$$

$$F_{124} = \frac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{(AB)^4} + \frac{1}{(AD)^4}}.$$

Находим силу F:

$$F = F_{124} + F_{13} = \frac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{(AB)^4} + \frac{1}{(AD)^4}} + \frac{Q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (AC)^2},$$

$$F = F_{124} + F_{13} = \frac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{(AB)^4} + \frac{1}{(AD)^4}} + \frac{1}{(AC)^2}\right),$$

$$F = F_{124} + F_{13} = \frac{(40 \cdot 10^{-9})^2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{(0{,}1)^4} + \frac{1}{(0{,}1)^4}} + \frac{1}{(0{,}1 \cdot \sqrt{2})^2}\right),$$

$$F = 14{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{Н} = 14{,}4\ \text{мкН}$$

Ответ: $F = 14{,}4$ мкН.

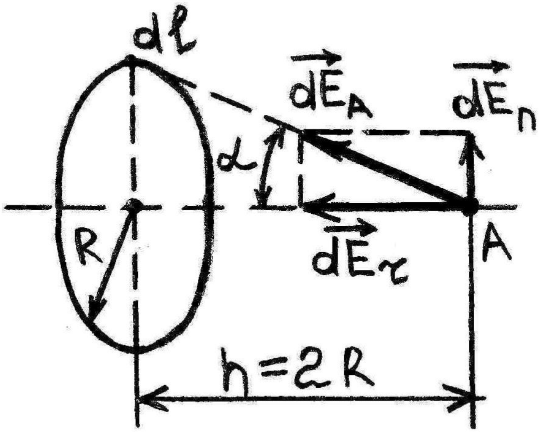
Задача 16

По тонкому кольцу $R = 20$ см равномерно распределён с линейной плотностью $\tau = 0,2$ мкКл/м заряд. Определить напряжённость E электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке А, находящейся на оси кольца на расстоянии $h = 2R$ от его центра.

<u>Дано:</u> $R = 20$ см $= 0,2$ м, $\tau = 0,2$ мкКл/м $= 0,2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м, $h = 2R$.

<u>Найти:</u> E_A.

Решение:



Каждый элемент кольца dl имеет заряд dq, создающий в точке А

электрическое поле напряжённостью: $dE_A = \dfrac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\sqrt{h^2 + R^2}\right)^2}$, где $dq = \tau \cdot dl$;

ε − диэлектрическая проницаемость (так как среда не задана, то принимаем $\varepsilon = 1$);
$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м − электрическая постоянная;

$$dE_A = \frac{\tau \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\sqrt{(2R)^2 + R^2}\right)^2} = \frac{\tau \cdot dl}{20 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2}.$$

Так как нормальные составляющие $\overrightarrow{dE_n}$ каждых двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, то $E_A = \int dE_\tau$ (1), где

$dE_\tau = dE_A \cdot \cos(\alpha)$ касательная составляющая;

$\alpha = arctg\left(\dfrac{R}{h}\right) = arctg\left(\dfrac{R}{2R}\right) = arctg(0,5)$.

Из выражения (1):

$$E_A = \int dE_A \cdot \cos(\alpha) = \int \frac{\tau \cdot dl}{20 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} \cdot \cos\left[arctg\left(0,5\right)\right] = \frac{\tau \cdot l \cdot \cos\left[arctg\left(0,5\right)\right]}{20 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2},$$

где $l = 2 \cdot \pi \cdot R$ − длина кольца.

Находим напряжённость в точке А:

$$E_A = \frac{\tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos\left[arctg\left(0,5\right)\right]}{20 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} = \frac{\tau \cdot \cos\left[arctg\left(0,5\right)\right]}{10 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R},$$

$$E_A = \frac{0,2 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\left[arctg\left(0,5\right)\right]}{10 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2} = 10,1 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 10,1 \text{ кВ/м}.$$

<u>Ответ:</u> $E_A = 10,1$ кВ/м.