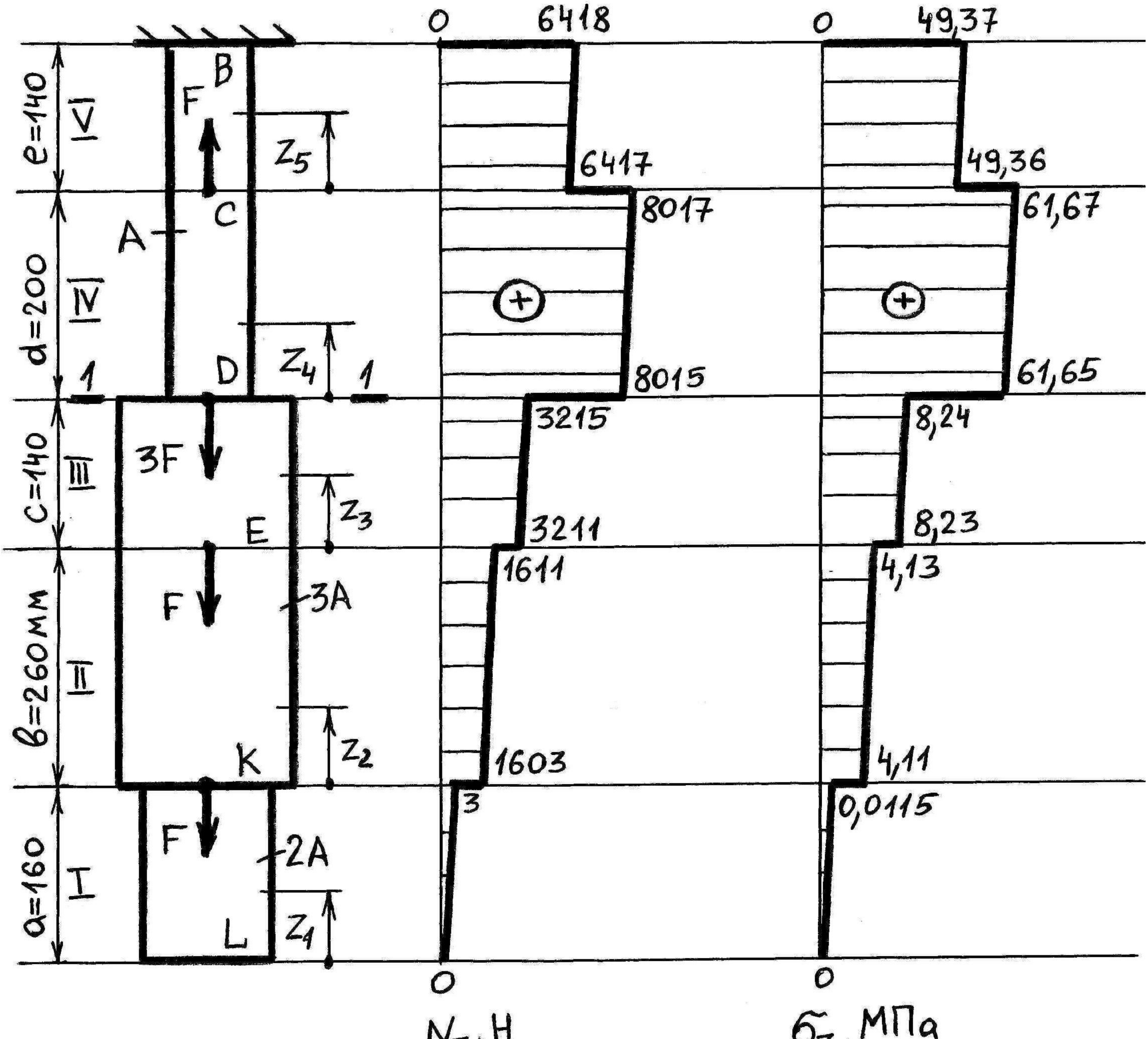
Задача 1.1 *В-64 (условие 6, схема 4)*

Дано: $A = 130\ мм^2$, $a = 160\ мм$, $в = 260\ мм$, $c = 140\ мм$, $d = 200\ мм$, $e = 140\ мм$,

$F = 1600\ Н$, $E = 2 \cdot 10^5\ МПа$, $[\sigma] = 160\ МПа$, $\rho = 7{,}7 \cdot 10^3\ кг/м^3$, .

Решение.

II. Ступенчатый стержень нагружен сосредоточенными силами F и собственным весом.



1) Строим эпюры продольных сил N_z и нормальных напряжений σ_z.

Разбиваем стержень на участки.

Участок I ($0 \le z_1 \le a = 160\ мм$):

$N_{z1} = q_1 \cdot z_1$;

$q_1 = \rho \cdot 2A \cdot g = 7,7 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 130 \cdot 9,81 \cdot 10^{-6} = 19,6\ Н/м$ - собственный вес стержня;

$N_{z1}(0) = 0\ Н, \quad N_{z1}(90) = 19,6 \cdot 160 \cdot 10^{-3} = 3\ Н$;

$$\sigma_{z1}(0) = \frac{N_{z1}(0)}{2A} = 0\ МПа, \quad \sigma_{z1}(160) = \frac{N_{z1}(160)}{2A} = \frac{3}{2 \cdot 130} = 0,0115\ МПа.$$

Участок II ($0 \le z_2 \le в = 260\ мм$):

$N_{z2} = q_1 \cdot a + F + q_2 \cdot z_2 = 1603 + q_2 \cdot z_2$;

$q_2 = \rho \cdot 3A \cdot g = 7,7 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 130 \cdot 9,81 \cdot 10^{-6} = 29,5\ Н/м$ - собственный вес стержня;

$N_{z2}(0) = 1603\ Н, \quad N_{z2}(260) = 1603 + 29,5 \cdot 260 \cdot 10^{-3} = 1611\ Н$;

$$\sigma_{z2}(0) = \frac{N_{z2}(0)}{3A} = \frac{1603}{3 \cdot 130} = 4,11\ МПа, \quad \sigma_{z2}(260) = \frac{N_{z2}(260)}{3A} = \frac{1611}{3 \cdot 130} = 4,13\ МПа.$$

Участок III ($0 \le z_3 \le c = 140\ мм$):

$N_{z3} = q_1 \cdot a + F + F + q_2 \cdot (в + z_3) = 3211 + 29,5 \cdot z_3$;

$N_{z3}(0) = 3211\ Н, \quad N_{z3}(140) = 3211 + 29,5 \cdot 140 \cdot 10^{-3} = 3215\ Н$;

$$\sigma_{z3}(0) = \frac{N_{z3}(0)}{3A} = \frac{3211}{3 \cdot 130} = 8,23\ МПа, \quad \sigma_{z3}(140) = \frac{N_{z3}(140)}{3A} = \frac{3215}{3 \cdot 130} = 8,24\ МПа.$$

Участок IV ($0 \le z_4 \le d = 200\ мм$):

$N_{z4} = q_1 \cdot a + F + F + q_2 \cdot (в + c) + 3F + q_3 \cdot z_4 = 8015 + q_3 \cdot z_4$;

$q_3 = \rho \cdot A \cdot g = 7,7 \cdot 10^3 \cdot 130 \cdot 9,81 \cdot 10^{-6} = 9,8\ Н/м$ - собственный вес стержня;

$N_{z4}(0) = 8015\ Н, \ N_{z4}(200) = 8015 + 9,8 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 8017\ Н$

$$\sigma_{z4}(0) = \frac{N_{z4}(0)}{A} = \frac{8015}{130} = 61,65\ МПа, \quad \sigma_{z4}(200) = \frac{N_{z4}(200)}{A} = \frac{8017}{130} = 61,67\ МПа.$$

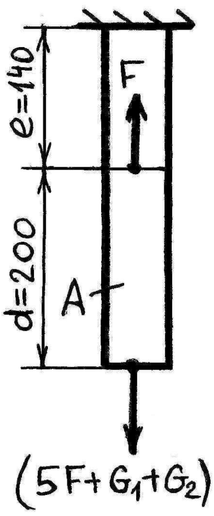
Участок V ($0 \le z_5 \le e = 160\ мм$):

$N_{z5} = q_1 \cdot a + F + F + q_2 \cdot (в + c) + 3F + q_3 \cdot (d + z_5) - F = 6417 + q_3 \cdot z_5$;

$N_{z5}(0) = 6417\ Н, \ N_{z5}(140) = 6417 + 9,8 \cdot 140 \cdot 10^{-3} = 6418\ Н$

$$\sigma_{z5}(0) = \frac{N_{z5}(0)}{A} = \frac{6417}{130} = 49,36\ МПа, \quad \sigma_{z5}(140) = \frac{N_{z5}(140)}{A} = \frac{6418}{130} = 49,37\ МПа.$$

2) Вычислим перемещение сечения 1-1.



Заменим заданный стержень на эквивалентный, нагруженный силами 5F, F и весом отброшенной части $(G_1 + G_2)$:

$$G_1 = q_1 \cdot a = 19,6 \cdot 160 \cdot 10^{-3} = 3\ H,$$

$$G_2 = q_2 \cdot (в + c) = 29,5 \cdot (260 + 140) \cdot 10^{-3} = 12\ H.$$

Находим перемещение сечения 1-1:

$$\delta_{1-1} = \frac{(G_1 + G_2 + 5F) \cdot (d + e)}{E \cdot A} - \frac{F \cdot e}{E \cdot A} + \frac{q_3 \cdot (d + e)^2}{2E \cdot A},$$

$$\delta_{1-1} = \frac{(3 + 12 + 8000) \cdot (200 + 140)}{2 \cdot 10^5 \cdot 130} - \frac{1600 \cdot 140}{2 \cdot 10^5 \cdot 130} + \frac{9,8 \cdot (200 + 140)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 130} = 0,118\ мм.$$

3) Из эпюры σ_z находим, что опасным является начальное сечение II участка: $\sigma_{\max} = \left|\sigma_{z4}(0)\right| = 61,67\ МПа$.

По условию прочности: $\sigma_{\max} \le [\sigma]$.

В нашем случае: $\sigma_{\max} = 61,67\ МПа \le [\sigma] = 160\ МПа$.

Следовательно, стержень прочный.

Контрольная работа № 1

Задача 1.2

Условие 4, схема 6 (шифр 46)

Дано: $M_1 = 1{,}1$ кН·м; $M_3 = 1$ кН·м; $M_4 = 6$ кН·м; $M_5 = 2{,}5$ кН·м;

$[\tau] = 45$ МПа; $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа; $[\varphi_0] = 0{,}02$ рад/м.

II. Стальной вала жёстко закреплён с обоих концов. Принимаем отношение диаметров $d_1 : d_2 : d_3 = 1 : 2 : 3$ (рис. 2,а).

Решение

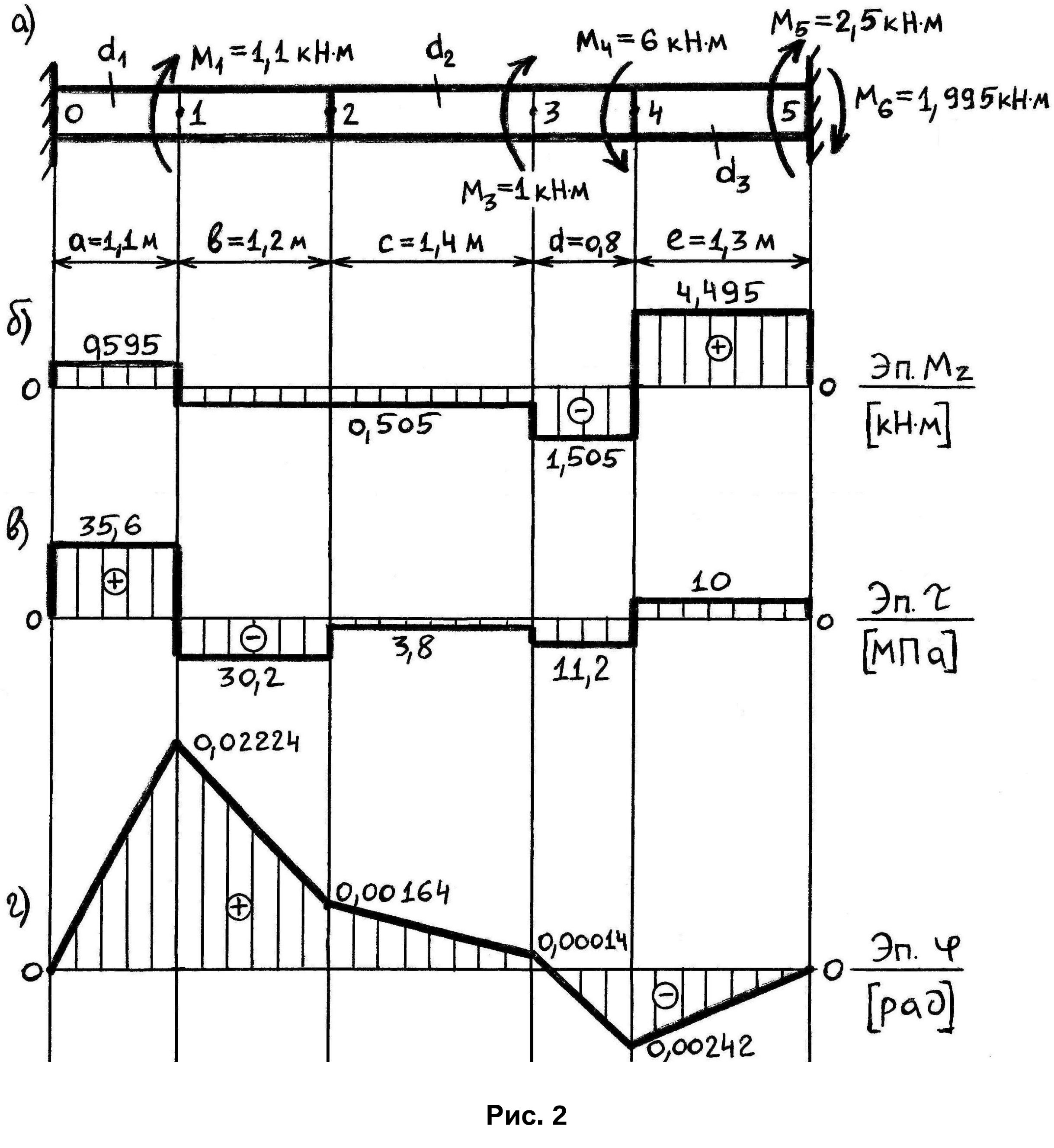


Рис. 2

1. Система один раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости мысленно отбрасываем правую заделку и её действие на вал заменяем моментом M_6 (рис. 2,а).

Составим уравнение угловых перемещений:

$$\frac{(-M_6-M_5)\cdot e}{G\cdot I_{\rho 3}}+\frac{(-M_6-M_5+M_4)\cdot d}{G\cdot I_{\rho 2}}+\frac{(-M_6-M_5+M_4-M_3)\cdot c}{G\cdot I_{\rho 2}}+$$

$$+\frac{(-M_6-M_5+M_4-M_3)\cdot в}{G\cdot I_{\rho 1}}+\frac{(-M_6-M_5+M_4-M_3-M_1)\cdot a}{G\cdot I_{\rho 1}}=0.$$

Из соотношения $d_1:d_2:d_3=1:2:3$ получим: $d_1=0,5\cdot d_2$ и $d_3=1,5\cdot d_2$.

Вычислим момент M_6:

$$I_{\rho 1}=\pi\cdot d_1^4\ /\ 32=3,14\cdot(0,5\cdot d_2)^4\ /\ 32=0,006134\cdot d_2^4;$$

$$I_{\rho 2}=\pi\cdot d_2^4\ /\ 32=3,14\cdot d_2^4\ /\ 32=0,098125\cdot d_2^4 \text{ мм}^4;$$

$$I_{\rho 3}=\pi\cdot d_3^4\ /\ 32=3,14\cdot(1,5\cdot d_2)^4\ /\ 32=0,496758\cdot d_2^4;$$

$$\frac{1}{G}\cdot\left[\frac{(-M_6-M_5)\cdot e}{0,496758\cdot d_2^4}+\frac{(-M_6-M_5+M_4)\cdot d+(-M_6-M_5+M_4-M_3)\cdot c}{0,098125\cdot d_2^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-M_6-M_5+M_4-M_3)\cdot в+(-M_6-M_5+M_4-M_3-M_1)\cdot a}{0,006134\cdot d_2^4}\right]=0\ \Big|\times(G\cdot d_2^4);$$

$$-M_6\cdot[2,013\cdot e+10,191\cdot(d+c)+163,026\cdot(в+a)]-M_5\cdot 2,013\cdot e+$$
$$+10,191\cdot[(-M_5+M_4)\cdot d+(-M_5+M_4-M_3)\cdot c]+163,026\cdot[(-M_5+M_4-M_3)\cdot в+$$
$$+(-M_5+M_4-M_3-M_1)\cdot a]=0;$$

$$-M_6\cdot[2,013\cdot 1,3+10,191\cdot(0,8+1,4)+163,026\cdot(1,2+1,1)]-2,5\cdot 2,013\cdot 1,3+$$
$$+10,191\cdot[(-2,5+6)\cdot 0,8+(-2,5+6-1)\cdot 1,4]+163,026\cdot[(-2,5+6-1)\cdot 1,2+$$
$$+(-2,5+6-1-1,1)\cdot 1,1]=0;\ M_6=1,995 \text{ кН·м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов M_z (рис. 2,б):

$M_{4-5} = M_6 + M_5 = 1{,}995 + 2{,}5 = 4{,}495$ кН·м;

$M_{3-4} = M_6 + M_5 - M_4 = 1{,}995 + 2{,}5 - 6 = -1{,}505$ кН·м;

$M_{2-3} = M_6 + M_5 - M_4 + M_3 = 1{,}995 + 2{,}5 - 6 + 1 = -0{,}505$ кН·м;

$M_{1-2} = M_6 + M_5 - M_4 + M_3 = 1{,}995 + 2{,}5 - 6 + 1 = -0{,}505$ кН·м;

$M_{0-1} = M_6 + M_5 - M_4 + M_3 + M_1 = 1{,}995 + 2{,}5 - 6 + 1 + 1{,}1 = 0{,}595$ кН·м.

3. Находим диаметры вала.

Находим полярные моменты сопротивления W_ρ и напряжения кручения τ:

$$W_{\rho 1} = \pi \cdot d_1^3 / 32 = 3{,}14 \cdot (0{,}5 \cdot d_2)^3 / 16 = 0{,}02453 \cdot d_2^3;$$

$$W_{\rho 2} = \pi \cdot d_2^3 / 32 = 3{,}14 \cdot d_2^3 / 16 = 0{,}19625 \cdot d_2^3 \text{ мм}^4;$$

$$W_{\rho 3} = \pi \cdot d_3^3 / 16 = 3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot d_2)^3 / 32 = 0{,}66234 \cdot d_2^3;$$

$$\tau_{0-1} = M_{0-1} / W_{\rho 1} = 0{,}595 \cdot 10^6 / (0{,}02453 \cdot d_2^3) = 2{,}4256 \cdot 10^6 / d_2^3;$$

$$\tau_{1-2} = M_{1-2} / W_{\rho 1} = -0{,}505 \cdot 10^6 / (0{,}02453 \cdot d_2^3) = -2{,}0587 \cdot 10^6 / d_2^3;$$

$$\tau_{2-3} = M_{2-3} / W_{\rho 2} = -0{,}505 \cdot 10^6 / (0{,}19625 \cdot d_2^3) = -2{,}5732 \cdot 10^6 / d_2^3;$$

$$\tau_{3-4} = M_{3-4} / W_{\rho 2} = -1{,}505 \cdot 10^6 / (0{,}19625 \cdot d_2^3) = -7{,}6688 \cdot 10^6 / d_2^3;$$

$$\tau_{4-5} = M_{4-5} / W_{\rho 3} = 4{,}495 \cdot 10^6 / (0{,}66234 \cdot d_2^3) = 6{,}7865 \cdot 10^6 / d_2^3.$$

Находим относительные углы закручивания: $\varphi = \dfrac{M_z}{G \cdot I_\rho}$;

$$\varphi_{0-1} = \frac{M_{0-1}}{G \cdot I_{\rho 1}} = \frac{0{,}595 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}006134 \cdot d_2^4} = 1212{,}5041 / d_2^4;$$

$$\varphi_{1-2} = \frac{M_{1-2}}{G \cdot I_{\rho 1}} = \frac{-0{,}505 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}006134 \cdot d_2^4} = -1029{,}1 / d_2^4;$$

$$\varphi_{2-3} = \frac{M_{2-3}}{G \cdot I_{\rho 2}} = \frac{-0{,}505 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}098125 \cdot d_2^4} = -64{,}3312 / d_2^4;$$

$$\varphi_{3-4} = \frac{M_{3-4}}{G \cdot I_{\rho 2}} = \frac{-1{,}505 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}098125 \cdot d_2^4} = -191{,}7197 / d_2^4;$$

$$\varphi_{4-5} = \frac{M_{4-5}}{G \cdot I_{\rho 3}} = \frac{4{,}495 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}496758 \cdot d_2^4} = 113{,}1084 / d_2^4.$$

Условие прочности

$$\tau_{\max} \le [\tau] \;\rightarrow\; \tau_{\max} = \left|\tau_{3-4}\right| = \left|-7,6688 \cdot 10^6 \,/\, d_2^3\right| \le [\tau];$$

$$d_2 \ge \sqrt[3]{\frac{7,6688 \cdot 10^6}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{7,6688 \cdot 10^6}{45}} = 55,44 \text{ мм;}$$

$$d_1 = 0,5 \cdot d_2 = 0,5 \cdot 55,44 = 27,72 \text{ мм и } d_3 = 1,5 \cdot d_2 = 1,5 \cdot 55,44 = 83,16 \text{ мм.}$$

Условие жёсткости

$$\varphi_{\max} \le [\varphi_0] \;\rightarrow\; \varphi_{\max} = \varphi_{0-1} = 1212,5041 \,/\, d_2^4 \le [\varphi_0];$$

$$d_2 \ge \sqrt[4]{\frac{1212,5041}{[\varphi_0]}} = \sqrt[4]{\frac{1212,5041}{0,02 \cdot 10^{-3}}} = 88,24 \text{ мм;}$$

$$d_1 = 0,5 \cdot d_2 = 0,5 \cdot 88,24 = 44,12 \text{ мм и } d_3 = 1,5 \cdot d_2 = 1,5 \cdot 88,24 = 132,36 \text{ мм.}$$

Принимаем, округляя, большие из найденных значения:

$d_1 = 44$ мм; $d_2 = 88$ мм; $d_3 = 132$ мм.

4. Строим эпюру действительных напряжений кручения τ по длине вала (рис. 1,в), предварительно определив полярные моменты сопротивления W_ρ:

$$W_{\rho 1} = \pi \cdot d_1^3 \,/\, 16 = 3,14 \cdot 44^3 \,/\, 16 = 16717,36 \text{ мм}^3;$$

$$W_{\rho 2} = \pi \cdot d_2^3 \,/\, 16 = 3,14 \cdot 88^3 \,/\, 16 = 133738,88 \text{ мм}^3;$$

$$W_{\rho 3} = \pi \cdot d_3^3 \,/\, 16 = 3,14 \cdot 132^3 \,/\, 16 = 451368,72 \text{ мм}^3;$$

$$\tau_{0-1} = M_{0-1} \,/\, W_{\rho 1} = 0,595 \cdot 10^6 \,/\, 16717,36 = 35,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{1-2} = M_{1-2} \,/\, W_{\rho 1} = -0,505 \cdot 10^6 \,/\, 16717,36 = -30,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{2-3} = M_{2-3} \,/\, W_{\rho 2} = -0,505 \cdot 10^6 \,/\, 133738,88 = -3,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{3-4} = M_{3-4} \,/\, W_{\rho 2} = -1,505 \cdot 10^6 \,/\, 133738,88 = -11,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{4-5} = M_{4-5} \,/\, W_{\rho 3} = 4,495 \cdot 10^6 \,/\, 451368,72 = 10 \text{ МПа}.$$

5. Определяем эпюру углов закручивания φ (рис. 1,г), предварительно определив полярные моменты инерции I_ρ:

$$I_{\rho 1} = \pi \cdot d_1^4 / 32 = 3{,}14 \cdot 44^4 / 32 = 367781{,}92 \text{ мм}^4;$$

$$I_{\rho 2} = \pi \cdot d_2^4 / 32 = 3{,}14 \cdot 88^4 / 32 = 5884510{,}72 \text{ мм}^4;$$

$$I_{\rho 3} = \pi \cdot d_3^4 / 32 = 3{,}14 \cdot 132^4 / 32 = 29790335{,}52 \text{ мм}^4;$$

$\varphi_0 = 0$ (жёсткая заделка);

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{M_{0-1} \cdot a}{G \cdot I_{\rho 1}} = 0 + \frac{0{,}595 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 367781{,}92} = 0{,}02224 \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{1-2} \cdot в}{G \cdot I_{\rho 1}} = 0{,}02224 + \frac{-0{,}505 \cdot 10^6 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 367781{,}92} = 0{,}00164 \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_{2-3} \cdot c}{G \cdot I_{\rho 2}} = 0{,}00164 + \frac{-0{,}505 \cdot 10^6 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 5884510{,}72} = 0{,}00014 \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + \frac{M_{3-4} \cdot d}{G \cdot I_{\rho 2}} = 0{,}00014 + \frac{-1{,}505 \cdot 10^6 \cdot 0{,}8 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 5884510{,}72} = -0{,}00242 \text{ рад};$$

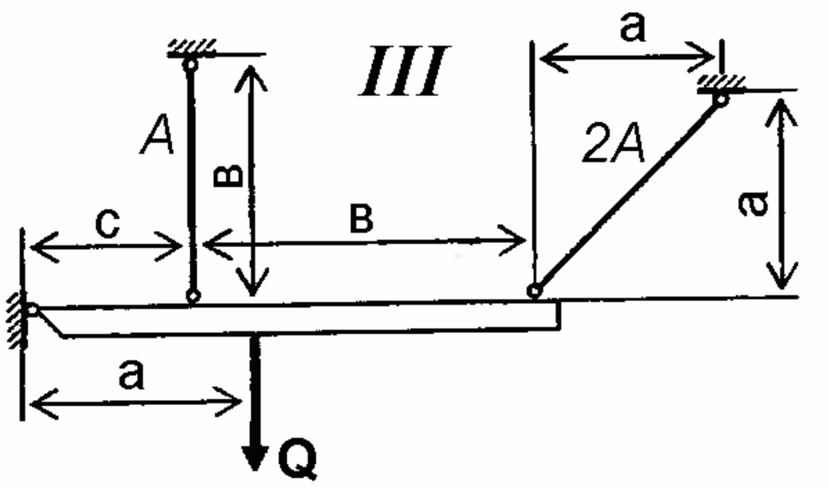
$$\varphi_5 = \varphi_4 + \frac{M_{4-5} \cdot e}{G \cdot I_{\rho 3}} = -0{,}00242 + \frac{4{,}495 \cdot 10^6 \cdot 1{,}3 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 29790335{,}52} = 0{,}00003 \approx 0 \text{ рад}.$$

Последний результат подтверждает, что сечение 5 – жёсткая заделка.

Задача 1 шифр 3 2 3

а б в

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров



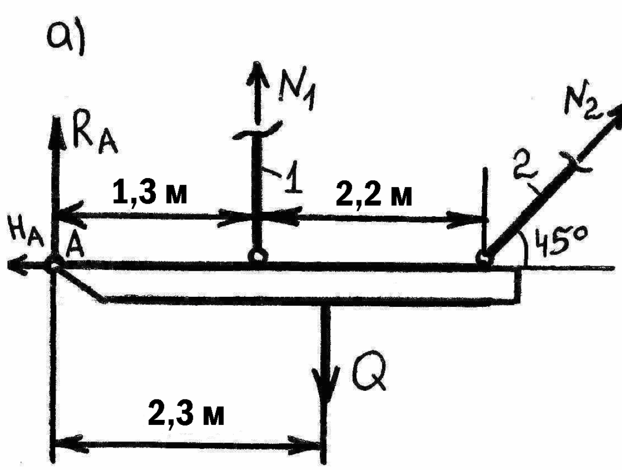
Требуется:

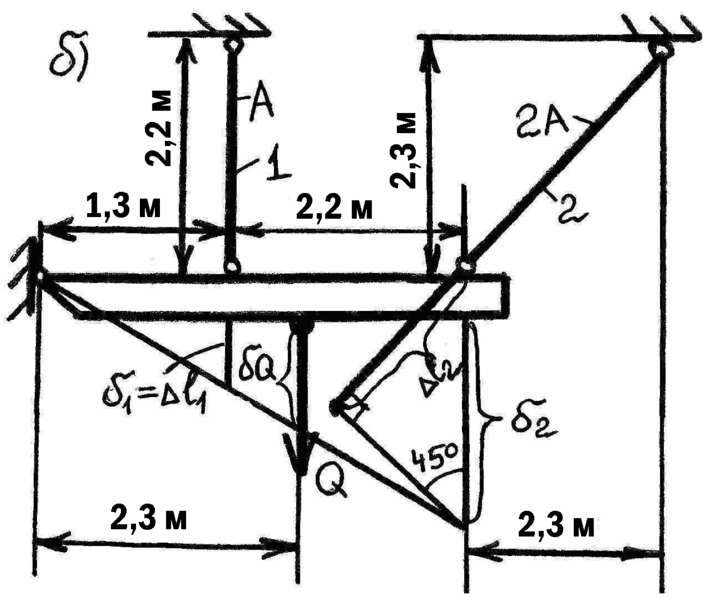
1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q;
2) найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma]$ = 160 МПа;
3) найти предельную грузоподъемность при σ_T = 240 МПа.
4) определить вертикальное перемещение точки приложения силы Q.

Дано: $A = 12\,\text{см}^2$; $a = 2{,}3$ м; $в = 2{,}2$ м; $c = 1{,}3$ м; $[\sigma] = 160$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа.

Решение

1. Находим усилия и напряжения, возникающие в стержнях.





Составим уравнение равновесия (рис. а):

$$\sum M_k = 0; \quad N_1 \cdot 1{,}3 + N_2 \cdot \sin 45° \cdot (1{,}3 + 2{,}2) - Q \cdot 2{,}3 = 0 \quad (1).$$

Найдём соотношение деформаций стержней Δl_1 и Δl_2 (рис. б):

$$\delta_1 = \Delta l_1, \; \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin 45°};$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1{,}3}{1{,}3 + 2{,}2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1 \cdot \sin 45°}{\Delta l_2} = \frac{1{,}3}{3{,}5} \quad \rightarrow \quad \Delta l_1 \cdot 1{,}904 = \Delta l_2 .$$

Учитывая закон Гука: $\dfrac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} \cdot 1{,}904 = \dfrac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}$,

где $l_1 = 2{,}2$ м, $l_2 = \sqrt{2{,}3^2 + 2{,}3^2} = 3{,}25$ м, $A_1 = A$, $A_2 = 2 \cdot A$;

$$\frac{N_1 \cdot 2{,}2}{E \cdot A} \cdot 1{,}904 = \frac{N_2 \cdot 3{,}25}{E \cdot 2 \cdot A} \quad \rightarrow \quad N_1 \cdot 2{,}58 = N_2 .$$

Из уравнения (1) находим усилия в стержнях:

$$N_1 \cdot 1{,}3 + N_1 \cdot 2{,}58 \cdot \sin 45° \cdot 3{,}5 - Q \cdot 2{,}3 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 0{,}3 \cdot Q, \quad N_2 = 0{,}774 \cdot Q$$

Находим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}3 \cdot Q}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0{,}774 \cdot Q}{2 \cdot A} = 0{,}387 \cdot \frac{Q}{A}.$$

2. Определяем допускаемую нагрузку $Q_{доп}$.

Из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 \le [\sigma] \quad \rightarrow \quad 0{,}387 \cdot \frac{Q}{A} \le [\sigma] \quad \rightarrow \quad 0{,}387 \cdot \frac{Q}{12 \cdot 10^{-4}} \le 160 \cdot 10^6,$$

$$Q \le 496 \text{ кН} \quad \rightarrow \quad Q_{доп} = 496 \text{ кН}.$$

3. Находим предельную грузоподъемность при $\sigma_T = 240$ *МПа*.

Подставим в выражение (1) предельные значения усилий в стержнях:

$$\sigma_T \cdot A \cdot 1{,}3 + \sigma_T \cdot 2 \cdot A \cdot \sin 45° \cdot 3{,}5 - Q_{пред} \cdot 2{,}3 = 0,$$

$$Q_{пред} = \frac{(1{,}3 + 7 \cdot \sin 45°) \cdot \sigma_T \cdot A}{2{,}3} = \frac{(1{,}3 + 7 \cdot \sin 45°) \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}{2{,}3},$$

$$Q_{пред} = 783 \text{ кН}$$

4. Определим вертикальное перемещение точки приложения силы Q:

$$\delta_Q = \delta_1 \cdot \frac{2{,}3}{1{,}3} = \Delta l_1 \cdot \frac{2{,}3}{1{,}3} = \frac{N_1 \cdot 2{,}2}{E \cdot A} \cdot \frac{2{,}3}{1{,}3} = \frac{0{,}3 \cdot 496 \cdot 10^3 \cdot 2{,}2}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{2{,}3}{1{,}3} = 0{,}0012 \text{ м}.$$

Задача 4 шифр 3 2 3

а б в

Для балки, изображенной на рис. 1, *а*, требуется:

1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x, найти $M_x^{\max}$;
2) подобрать прямоугольное ($h : b = 2$), кольцевое ($d_{внутр} : d_{внешн} = 0{,}8$) и двутавровое поперечное сечение при $[\sigma] = 160$ МПа;
3) выбрать наиболее рациональное сечение по расходу материала.

Для деревянной балки круглого поперечного сечения (рис. 1, *б*) требуется:

1) построить эпюры Q_y и M_x, найти $M_x^{\max}$;
2) подобрать диаметр сечения при $[\sigma] = 8$ МПа;
3) построить эпюру прогибов при $E = 1{,}2 \cdot 10^4$ МПа

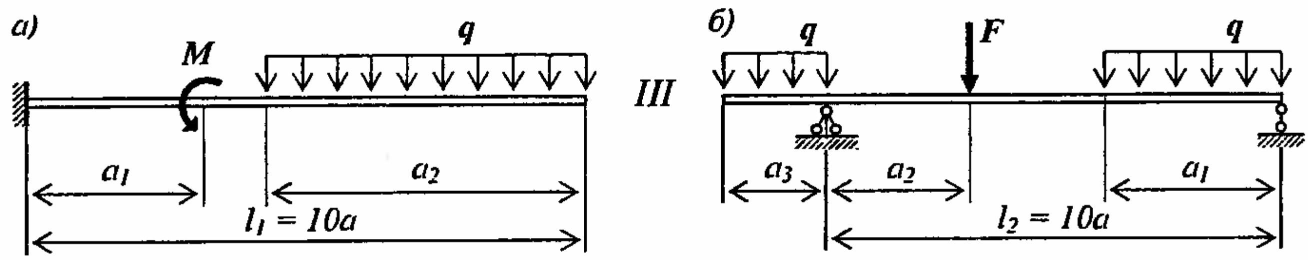


Рис. 1

Балка 1а

Дано: $l_1 = 10a = 1{,}2$ м, $a = 0{,}12$ м, $a_1 = 3a = 0{,}36$ м, $a_2 = 8a = 0{,}96$ м, $M = 3$ кН·м,

$F = 20$ кН, $q = 3$ кН/м, $h : в = 2$, $d_{внутр} : d_{внешн} = 0{,}8$, $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение.

1. Строим эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_x.

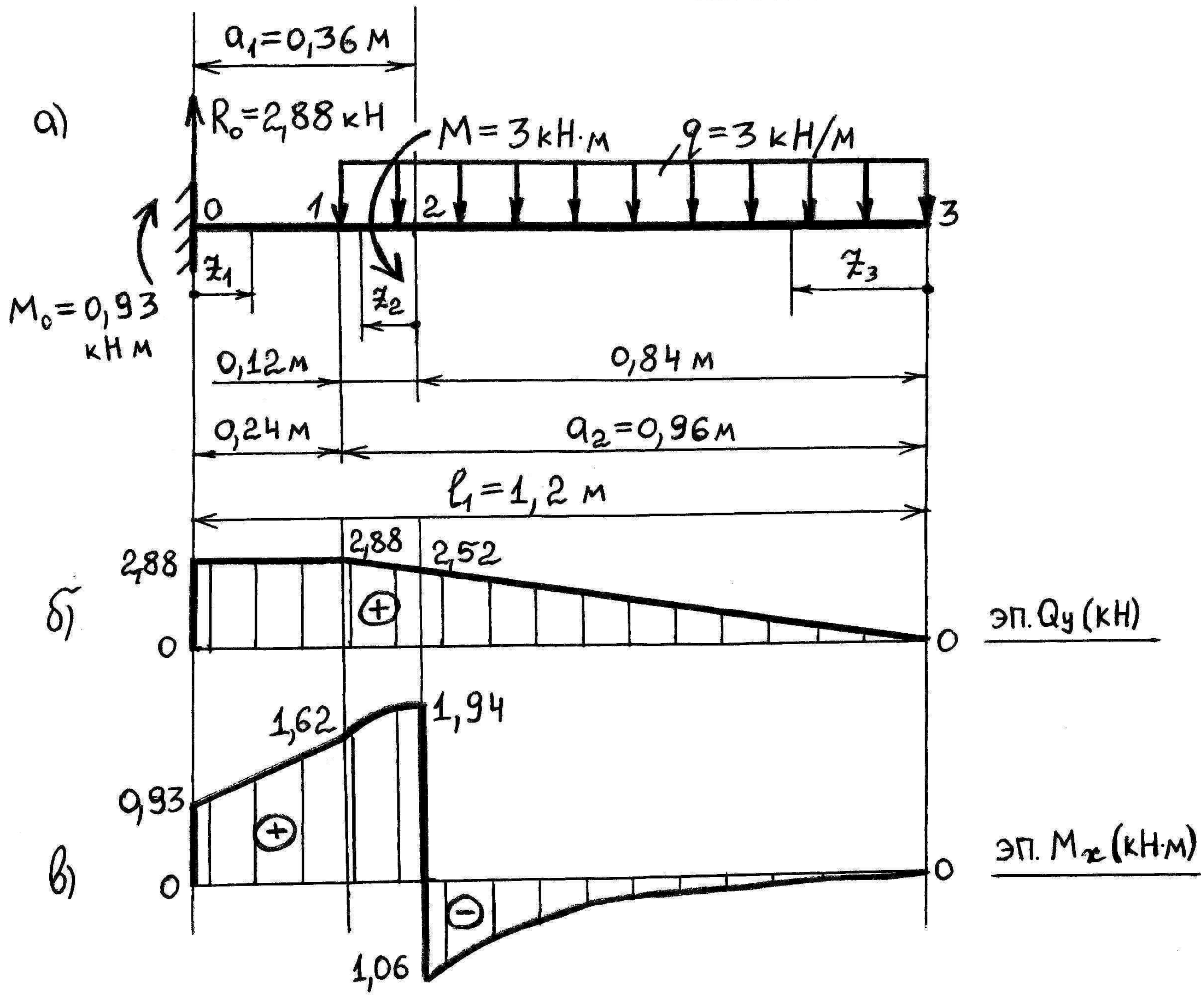


Рис. 2

Находим опорную реакцию R_0 и опорный момент M_0 (рис.2,а):

$$\sum F_y = 0,\ R_0 - q \cdot a_2 = 0 \ \rightarrow \ R_0 = q \cdot a_2 = 3 \cdot 0{,}96 = 2{,}88 \text{ кН};$$

$$\sum m_0 = 0,\ M_0 - M + q \cdot a_2 \cdot \left(\frac{a_2}{2} + 0{,}24 \right) = 0,$$

$$M_0 = M - q \cdot a_2 \cdot \left(\frac{a_2}{2} + 0{,}24 \right) = 3 - 3 \cdot 0{,}96 \cdot \left(\frac{0{,}96}{2} + 0{,}24 \right) = 0{,}93 \text{ кН·м}.$$

Выполним проверку, составив уравнение равновесия $\sum m_3 = 0$:

$$M_0 + R_0 \cdot l_1 - q \cdot \frac{a_2^2}{2} - M = 0{,}93 + 2{,}88 \cdot 1{,}2 - 3 \cdot \frac{0{,}96^2}{2} - 3 = 4{,}4 - 4{,}4 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно

Находим значения Q_y и M_x на каждом участке.

<u>Участок № 1</u> ($0 \le z_1 \le 0{,}24$ м)

$Q_1 = R_0 = 2{,}88$ кН, $M_1 = M_0 + R_0 \cdot z_1 = 0{,}93 + 2{,}88 \cdot z_1$;

при $z_1 = 0 \rightarrow M_1 = 0{,}93$ кН $\cdot$ м;

при $z_1 = 0{,}24$ м $\rightarrow M_1 = 0{,}93 + 2{,}88 \cdot 0{,}24 = 1{,}62$ кН $\cdot$ м.

<u>Участок № 2</u> ($0 \le z_2 \le 0{,}12$ м)

$Q_2 = q \cdot (0{,}84 + z_2) = 3 \cdot (0{,}84 + z_2)$ кН,

$$M_2 = M - q \cdot \frac{(0{,}84 + z_2)^2}{2} = 3 - 3 \cdot \frac{(0{,}84 + z_2)^2}{2};$$

при $z_2 = 0 \rightarrow Q_2 = 3 \cdot 0{,}84 = 2{,}52$ кН, $M_2 = 3 - 3 \cdot \dfrac{0{,}84^2}{2} = 1{,}94$ кН $\cdot$ м;

при $z_2 = 0{,}12$ м $\rightarrow Q_2 = 3 \cdot (0{,}84 + 0{,}12) = 2{,}88$ кН,

$$M_2 = 3 - 3 \cdot \frac{(0{,}84 + 0{,}12)^2}{2} = 1{,}62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

<u>Участок № 3</u> ($0 \le z_2 \le 0{,}84$ м)

$Q_3 = q \cdot z_3 = 3 \cdot z_3$ кН, $M_3 = -q \cdot \dfrac{z_3^2}{2} = -3 \cdot \dfrac{z_3^2}{2}$;

при $z_3 = 0 \rightarrow Q_3 = 0$ кН, $M_3 = 0$ кН $\cdot$ м;

при $z_3 = 0{,}84$ м $\rightarrow Q_3 = 3 \cdot 0{,}84 = 2{,}52$ кН, $M_3 = -3 \cdot \dfrac{0{,}84^2}{2} = -1{,}06$ кН $\cdot$ м.

По найденным значениям строим эпюры Q_y и M_x (рис. 2,б,в).

2. Подбираем размеры поперечного сечения балки.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \le [\sigma],$$

где W_x – момент сопротивления балки при изгибе.

Наибольший по абсолютному значению изгибающий момент возникает в точке 1: $M_{\max} = |M_2| = 1{,}94 \cdot 10^6$ Н·мм.

Получим: $W_x \geq \dfrac{M_{\max}}{[\sigma]} = \dfrac{1{,}94 \cdot 10^6}{160} = 12125\,\text{мм}^3$.

а) Прямоугольное поперечное сечение балки (h:b=2)

$$W_x = \frac{в \cdot h^3}{12}, \quad h{=}2в, \quad W_x = \frac{в \cdot h^2}{6} = \frac{в \cdot (2в)^2}{6} = \frac{2 \cdot в^3}{3} = 12125\,\text{мм}^3;$$

$$в \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 12125}{2}} = 26{,}3\,\text{мм}$$

Принимаем $в$ = 28 мм, тогда h = 2$в$ = 56 мм.

б) Кольцевое поперечное сечение балки ($d_{\text{внутр}} : d_{\text{внешн}} = 0{,}8$)

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3_{\text{внешн}}}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d_{\text{внутр}}}{d_{\text{внешн}}}\right)^4\right]; \ \frac{d_{\text{внутр}}}{d_{\text{внешн}}} = 0{,}8; \ W_x = 0{,}0185 \cdot \pi \cdot d^3_{\text{внешн}} = 12125\,\text{мм}^3;$$

$$d_{\text{внешн}} \geq \sqrt[3]{\frac{12125}{0{,}0185 \cdot 3{,}14}} = 59{,}3\,\text{см},$$

Принимаем $d_{\text{внешн}} = 60\,\text{мм}$, тогда $d_{\text{внутр}} = 0{,}8 \cdot d_{\text{внешн}} = 0{,}8 \cdot 60 = 48\,\text{мм}$.

в) Двутавровое поперечное сечение балки.

По сортаменту ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №10, для которого:

$$W_x^{10} = 39{,}7\,\text{см}^3 > W_x = 12{,}125\,\text{см}^3.$$

3. Определяем наиболее рациональное сечение по расходу материала.

а) Прямоугольное поперечное сечение $в$ = 28 мм, h = 56 мм:

$$A = в \cdot h = 28 \cdot 56 = 1568\,\text{мм}^2.$$

б) Кольцевое поперечное сечение $d_{\text{внутр}} = 48\,\text{мм}$, $d_{\text{внешн}} = 60\,\text{мм}$:

$$A = \frac{\pi \cdot \left(d^2_{\text{внешн}} - d^2_{\text{внутр}}\right)}{4} = \frac{3{,}14 \cdot \left(60^2 - 48^2\right)}{4} = 1017\,\text{мм}^2.$$

в) Двутавровое поперечное сечение двутавр № 10: $A = 1200$ мм^2.

Наиболее рационально использовать кольцевое поперечное сечение, так как его площадь оказалась наименьшей.