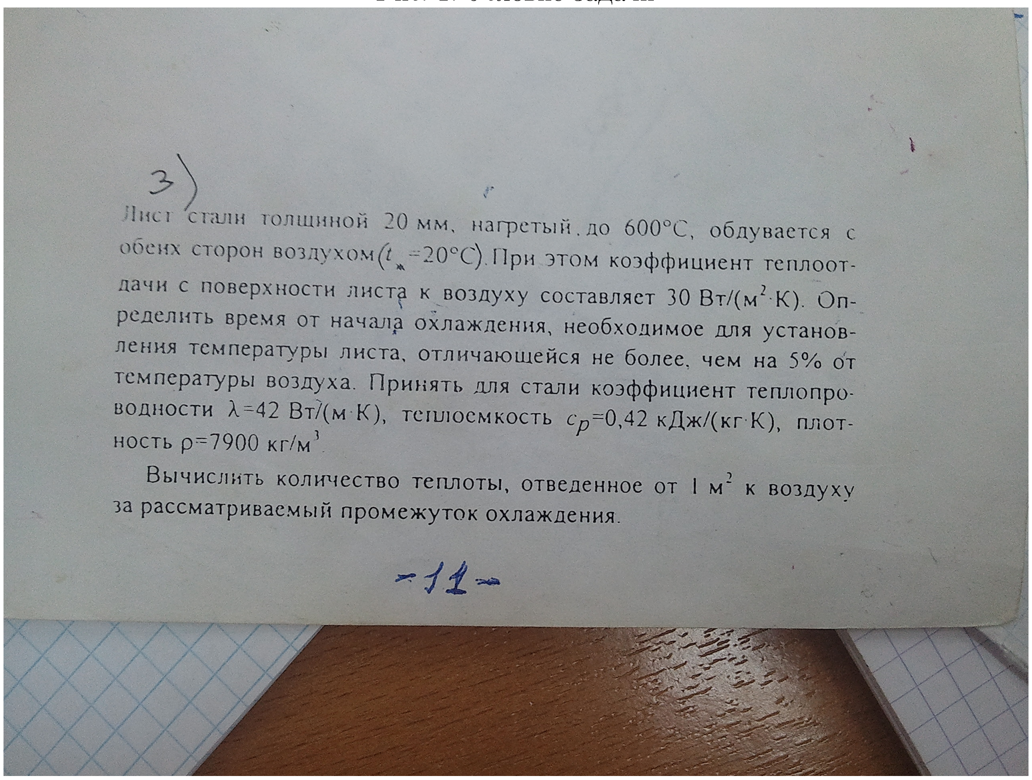
Рис. 1: Условие задачи



3)

Лист стали толщиной 20 мм, нагретый до 600°С, обдувается с обеих сторон воздухом ($t_ж$=20°С). При этом коэффициент теплоотдачи с поверхности листа к воздуху составляет 30 Вт/(м^2·К). Определить время от начала охлаждения, необходимое для установления температуры листа, отличающейся не более, чем на 5% от температуры воздуха. Принять для стали коэффициент теплопроводности λ=42 Вт/(м·К), теплоемкость c_p=0,42 кДж/(кг·К), плотность ρ=7900 кг/м^3.

Вычислить количество теплоты, отведенное от 1 м^2 к воздуху за рассматриваемый промежуток охлаждения.

-11-

Решение. $\delta = 0.01$м$, T0 = 600°C, T$ж$ = 20°C, \alpha = 30\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}, \lambda = 42\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}, Cp = 420\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}, \rho = 7900\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, F = 1\text{м}^2$

Считаем начало оси x лежащим в центре пластины. Координаты концов пластины δ и $-\delta$.

Уравнение теплопроводности с краевыми условиями

$$\begin{cases} \rho \cdot Cp\frac{dt}{d\tau} = \lambda\triangle t \\ t(x,0) = T0 \\ -\lambda\frac{dt}{dx}\mid_\delta = \alpha(t(\delta) - T\text{ж}) \\ \lambda\frac{dt}{dx}\mid_{-\delta} = \alpha(t(-\delta) - T\text{ж}) \end{cases}$$

Добавляем уравнение симметрии (заменяем одно из краевых на него)

$\frac{dt}{dx}|_{x=0} = 0$

Делаем замену $\vartheta(x,\tau) = t(x,\tau) - T$ж

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{d\tau} = a\frac{d^2\vartheta}{dx^2} \\ \vartheta(x,0) = T0 - T\text{ж} \\ (-\lambda\frac{d\vartheta}{dx} + \alpha\vartheta)|_{x=\delta} = 0 \\ \frac{d\vartheta}{dx}|_0 = 0 \end{cases}$$

Решаем методом разделения переменных

$\vartheta(x,\tau) = T(\tau)\Phi(x)$

$\frac{1}{aT}\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\beta^2$

$T' + \beta^2 aT = 0$

С учетом ограниченности функции: $T(\tau) = C1 \exp(-\beta^2 a\tau)$

$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \beta^2\Phi = 0$

$\Phi(x) = C2 \cdot cos(\beta x) + C3 \cdot sin(\beta x)$

$\frac{d\Phi}{dx}|_0 = 0 \to C3 = 0$

$(\lambda\frac{d\Phi}{dx} + \alpha\Phi)|_{x=\delta} = 0 \to ctg(\beta\delta) = \frac{\beta\lambda}{\alpha}$

Сделаем замену $\mu = \beta\delta$, а также введем число $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$

В итоге данное условие перейдет в $ctg(\mu) = \frac{\mu}{Bi}$

Данное уравнение является трансцендентным и имеет бесконечное число корней.

Оценим число Био:$Bi = \frac{30 \cdot 0.01}{42} = 0.00714286 \ll 1$

Для малых чисел Био допустимо решение трансцендентного уравнения в виде: $\mu^2 = Bi, \beta^2 = \frac{Bi}{\delta^2}$.

Тогда $\Phi(x) = C2 \cdot cos(\sqrt{Bi} \cdot \frac{x}{\delta})$

Общее решение:

$\vartheta(x,\tau) = C \cdot cos(\sqrt{Bi} \cdot \frac{x}{\delta}) \cdot \exp(-\frac{Bi}{\delta^2}a\tau)$

Начальное условие

$\vartheta(x,0) = C$

С условием ввода числа Фурье $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$, получаем

$\vartheta(x,\tau) = \vartheta(x,0) \cdot cos(\sqrt{Bi} \cdot \frac{x}{\delta}) \cdot \exp(-Bi \cdot Fo)$

Малость числа Био физически означает то, что перепад температур по толщине пластины мал, по сравнению с перепадом температур на границе раздела стенки и жидкости. Тем самым можем убрать зависимость от координаты.

$\vartheta(\tau) = \vartheta(0) \cdot \exp(-Bi \cdot Fo)$

$t(\tau) - T\text{ж} = (T0 - T\text{ж}) \cdot \exp(-Bi \cdot Fo)$

По условию задачи температура в неизвестный момент времени τ' должна быть равна $1.05 \cdot T$ж

Получаем

$\frac{0.05T\text{ж}}{T0 - T\text{ж}} = \exp(-Bi \cdot Fo)$

$Bi \cdot Fo = -ln\left(\frac{0.05T\text{ж}}{T0 - T\text{ж}}\right)$

$\frac{\alpha\delta}{\lambda} \cdot \frac{a\tau'}{\delta^2} = -ln\left(\frac{0.05T\text{ж}}{T0 - T\text{ж}}\right)$

В итоге:

$\tau' = \frac{\delta \cdot \rho \cdot Cp}{\alpha} \cdot ln\left(\frac{T0 - T\text{ж}}{0.05T\text{ж}}\right)$

$\tau' = 7037.5c \approx 117$мин

Расчет количества теплоты.

Закон Био-Фурье

$q_F(\tau) = \alpha(t(\tau) - T\text{ж})$

Полный тепловой поток

$Q(\tau) = F \cdot q_F(\tau)$

Количество теплоты за время $\tau' = 7037.5c$

$W = \int_0^{\tau'} Q(\tau)d\tau = \alpha\int_0^{\tau'} (T0 - T\textbf{ж}) \cdot \exp(-\frac{\alpha}{\delta\rho Cp}\tau)d\tau$

$W = 19.2$ **МДж**