Дано:

$$\begin{cases} \triangle U = 0 & D_l = \{r > a\} \\ (U_r - U)|_{r=a} = 3cos(\phi) - sin(\phi) \end{cases} \tag{1}$$

Раскрываем оператор Лапласа и условия периодичности:

$$\begin{cases} \triangle U = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dU}{dr}) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2U}{d\phi^2} = 0 \\ U(r,0) = U(r,2\pi) \\ \frac{dU(r,0)}{d\phi} = \frac{dU(r,2\pi)}{d\phi} \\ (U_r - U)|_{r=a} = 3cos(\phi) - sin(\phi) \end{cases} \tag{2}$$

Применяем метод разделения переменных и ищем решение в виде:

$$U(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi) \tag{3}$$

Подставим в 2
$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR(r)}{dr})\Phi(\phi) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0$
и разделим переменные:

$$\frac{R''(r) + \frac{R'(r)}{r}}{\frac{R(r)}{r^2}} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda \tag{4}$$

В последним равенстве функция слева зависит только от r, справа - только от ϕ. Так как это равенство выполняется в области D_l, то эти функции равны константе λ.

Откуда получаем два ОДУ:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0 \tag{5}$$

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \tag{6}$$

Для уравнения 6 условия периодичности преобразуются в

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \tag{7}$$

Данные дифференциальные уравнения являются стандартными. Методы их решения хорошо приведены в вашей методичке в “Приложении 1” и “Приложении 4”.

Уравнение 6 имеет следующие решения:

$$\lambda_0 = 0, \Phi_0(\phi) = 1 \tag{8}$$

$$\lambda_n = n^2, \Phi_n(\phi) = A_n cos(n\phi) + B_n sin(n\phi), n = 1..\infty \tag{9}$$

Уравнение 5 имеет решения следующего вида:

$$R_0(r) = C_0 + D_0 ln(r) \tag{10}$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, n = 1..\infty \tag{11}$$

Так как функция R должна быть ограничена (условие регулярности при $r \to \infty$), то $D_0 = 0, C_n = 0$, т.к. $ln(r) \to \infty$ и $r^n \to \infty$ при $r \to \infty$.

В итоге общее решение системы 2:

$$U(r,\phi) = R_n(r)\Phi_n(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n cos(n\phi) + b_n sin(n\phi)) \tag{12}$$

В последнем ряде: $a_0 = 2C_0, a_n = A_n C_n, b_n = B_n C_n$.

Найдем коэффициенты a и b из граниченого условия, для этого:

$$U_r(r,\phi) = \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} (-\mathrm{n}) r^{-n-1}(a_n cos(n\phi) + b_n sin(n\phi)) \tag{13}$$

Подставляем в краевое условие (1):

$$(U_r - U)|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n \cdot a^{-n-1} - a^{-n})(a_n cos(n\phi) + b_n sin(n\phi)) - \frac{a_0}{2} = 3cos(\phi) - sin(\phi) \tag{14}$$

В последнем равенстве приравняем коэффициенты при равных тригонометрических функциях. То есть при $n \neq 1$ все коэффициенты равны нулю, т.к. вр правой часте фигурирует только $cos(1 \cdot \phi)$ и $sin(1 \cdot \phi)$. Получаем следующие равенства:

$$\left(-1 \cdot a^{-1-1} - a^{-1}\right) a_1 = 3 \tag{15}$$

$$\left(-1 \cdot a^{-1-1} - a^{-1}\right) b_1 = -1 \tag{16}$$

В итоге получаем:

$$a_1 = -\frac{3a^2}{1+a} \tag{17}$$

$$b_1 = \frac{a^2}{1+a} \tag{18}$$

$$a_n = 0, b_n = 0, \text{при } n \neq 1 \tag{19}$$

В итоге:

$$U(r,\phi) = \frac{1}{r}\left(-\frac{3a^2}{1+a} cos(\phi) + \frac{a^2}{1+a} sin(\phi)\right) \tag{20}$$

Подстановка данное выражения в уравнения (1) дает верные тождества, что говорит о том что проверка выполнена и данное уравнение верно.