$$\begin{cases} \triangle U(x,y) = sin6x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \infty \\ U(0,y) = 0 \\ U(\frac{\pi}{2}, y) = 0 \\ U(x,0) = sin8x \end{cases}$$

Замена $V = U + \frac{sin(6x)}{36}$

$$\begin{cases} \triangle V(x,y) = 0 \\ V(0,y) = 0 \\ V(\frac{\pi}{2}, y) = 0 \\ V(x,0) = sin8x + \frac{sin(6x)}{36} \end{cases}$$

Разделяем переменные $V = X(x)Y(y)$

$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$

Решаем для X

$X'' + \lambda X = 0$

$X_n(x) = A_n cos(\sqrt{\lambda_n} x) + B_n sin(\sqrt{\lambda_n} x)$

$X_n(0) = 0 \rightarrow A_n = 0$

$X_n(\pi) = 0 \rightarrow \lambda_n = 2n, n = 0..\infty$

Решаем для Y

$Y'' - \lambda Y = 0$

$Y_n(y) = C_n e^{-2 \cdot n \cdot y} + D_n e^{2 \cdot n \cdot y}$

Из условий ограниченности функции $D_n = 0$

Общее решение:

$V(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n sin(2 \cdot n \cdot x) e^{-2 \cdot n \cdot y}$

Из условия $V(x,0) = sin8x + \frac{sin(6x)}{36}$ получаем, что $a_4 = 1, a_3 = \frac{1}{36}$, в случае $n \neq 3, 4 \Rightarrow a_n = 0$

Тогда:

$V(x,y) = sin(8x) \cdot e^{-8 \cdot y} + \frac{1}{36} \cdot sin(6x) \cdot e^{-6 \cdot y}$

В итоге:

$U(x,y) = sin(8x) \cdot e^{-8 \cdot y} + \frac{1}{36} \cdot sin(6x) \cdot (e^{-6 \cdot y} - 1)$

Подстановка полученного выражения в начальную систему дает верные тождества.