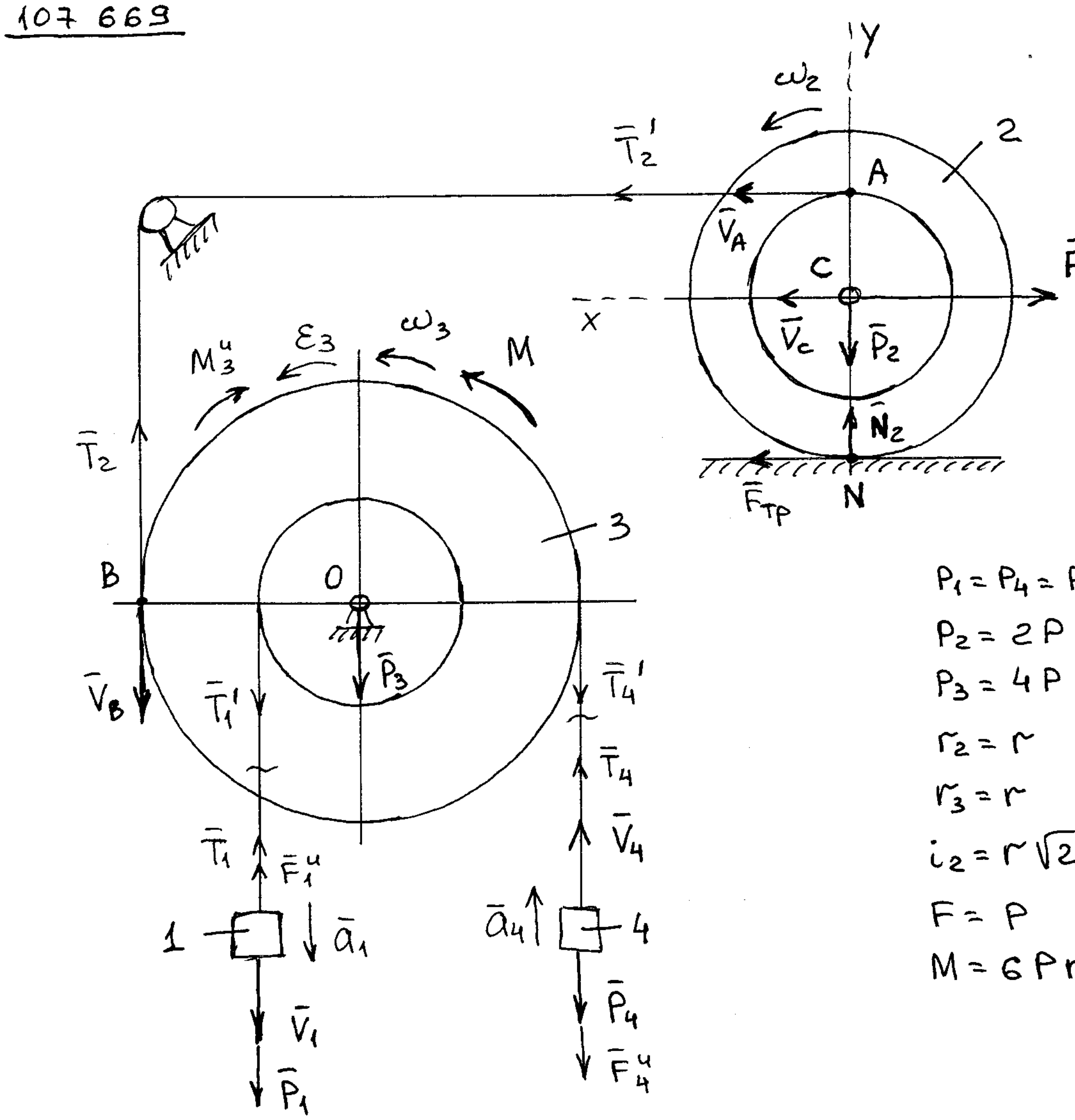
107 669



$P_1 = P_4 = P$

$P_2 = 2P$

$P_3 = 4P$

$r_2 = r \quad R_2 = 2r$

$r_3 = r \quad R_3 = 3r$

$i_2 = r\sqrt{2} \quad i_3 = r\sqrt{3}$

$F = P$

$M = 6Pr$

Задача 1

Выразим скорости всех тел через V_1. При этом учитываем, что нити нерастяжимы, проскальзывание отсутствует. МЦС диска 2 находится в точке N.

$$\omega_3 = \frac{V_1}{r_3} = \frac{V_1}{r}$$

$$V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = \frac{V_1}{r} \cdot 3r = 3V_1$$

$$V_A = V_B, \quad \omega_2 (R_2 + r_2) = \omega_3 R_3, \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{V_1}{r}$$

$$V_C = \omega_2 R_2 = \frac{V_1}{r} \cdot 2r = 2V_1$$

Определяем кинетическую энергию системы

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} V_1^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} V_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \cdot (2V_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_2^2 \cdot \left(\frac{V_1}{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{P}{g} \cdot 4V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \cdot 2r^2 \cdot \frac{V_1^2}{r^2} = 6 \frac{P}{g} V_1^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_3}{g} i_3^2 \cdot \left(\frac{V_1}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4P}{g} \cdot 3r^2 \cdot \frac{V_1^2}{r^2} = 6 \frac{P}{g} V_1^2$$

$$T_4 = \frac{1}{2} \frac{P_4}{g} V_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot (3V_1)^2 = \frac{9}{2} \frac{P}{g} V_1^2$$

$$T = \Sigma T_i = 17 \frac{P}{g} V_1^2 \qquad (1)$$

Теорема об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \Sigma A_K^e \qquad (2)$$

У нас $T_0 = 0$

Найдем сумму работ всех внешних сил при перемещении, когда груз 1 пройдет путь S_1.

$$A(\bar{P}_1) = P_1 S_1 = P S_1$$

$$A(\bar{P}_4) = -P_4 S_4 = -P \cdot 3 S_1$$

$$A(M) = M \varphi_3 = 6 P r \cdot \frac{S_1}{r} = 6 P S_1$$

$$A(\bar{F}) = -F S_c = -P \cdot 2 S_1$$

Работы остальных сил равны нулю, т.к. эти силы либо приложены в неподвижных точках, либо перпендикулярны направлению движения

$$\Sigma A_K^e = P S_1 (1 - 3 + 6 - 2) = 2 P S_1 \qquad (3)$$

Из (2) получаем

$$17 \frac{P}{g} V_1^2 = 2 P S_1,$$

откуда

$$V_1^2 = \frac{g}{8{,}5} S_1 = \frac{9{,}81}{8{,}5} S_1$$

$$\boxed{V_1 = 1{,}074 \sqrt{S_1}} \qquad (4)$$

Мощность внешних сил

$$\Sigma N(\bar{F}_K) = \frac{\Sigma A_K^e}{t} = 2 P V_1$$

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma N(\bar{F}_K)$$

$$2 \cdot 17 \frac{P}{g} V_1 a_1 = 2 P V_1$$

$$a_1 = \frac{2 P V_1}{2 \cdot 17 P V_1} \cdot g = \frac{g}{17} = \frac{9{,}81}{17} = 0{,}577 \text{ м/с}^2$$

Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

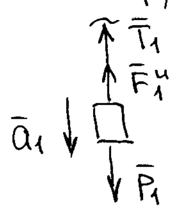
Силы инерции

$$F_1^{и} = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P}{g} a_1$$

$$F_4^{и} = \frac{P_4}{g} a_4 = \frac{P}{g} \cdot 3a_1$$

$$M_3^{и} = \frac{P_3}{g} \cdot i_3^2 \cdot \varepsilon_3 = \frac{4P}{g} \cdot 3r^2 \cdot \frac{a_1}{r} = 12 \frac{P}{g} r a_1$$

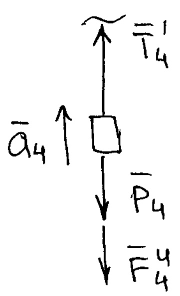
Для груза 1



$$T_1 + F_1^{и} - P_1 = 0$$

$$T_1 = P_1 - F_1^{и} = P - \frac{P}{g} a_1 = P\left(1 - \frac{a_1}{g}\right) = P\left(1 - \frac{0{,}577}{9{,}81}\right) = 0{,}941\,P$$

Для груза 4

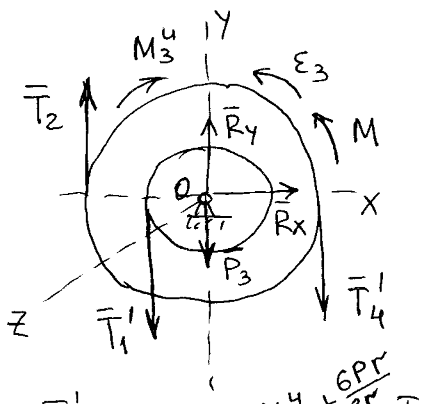


$$T_4 - P_4 - F_4^{и} = 0$$

$$T_4 = P_4 + F_4^{и} = P + 3\frac{P}{g} a_1 = P\left(1 + \frac{3a_1}{g}\right) =$$

$$= P\left(1 + \frac{3 \cdot 0{,}577}{9{,}81}\right) = 1{,}176\,P$$

Для диска 3 (учитываем, что $\bar{T}_i = -\bar{T}_i'$)



$$\Sigma M_z(\bar{F}_i) = 0$$

$$T_1' \cdot r_3 - T_4' \cdot R_3 - T_2 R_3 - M_3^{и} + M = 0$$

$$\cancel{T_2 = \frac{T_1' r - T_4 \cdot 4R - M_3^{и}}{4R}}$$

$$T_2 = \frac{T_1' r - T_4 \cdot 3r - M_3^{и} + M}{3r}$$

$$= \frac{T_1'}{3} - T_4 - \frac{M_3^{и}}{3r} + \frac{6Pr}{3r} = \frac{T_1'}{3} - T_4 - \frac{1}{3r} \cdot 12 \frac{P}{g} r a_1 + 2P =$$

$$= \frac{0{,}941}{3} P - 1{,}176\,P - \frac{4 \cdot 0{,}577}{9{,}81} P + 2P = 0{,}902\,P$$

$$T_2 = 0{,}902\,P$$

Задача 2

Дифференциальные уравнения плоского движения тела 2 (ось X направим влево)

$$\begin{cases} \frac{P_2}{g}\ddot{X}_c = \sum F^e_{kx} = -F + T_2 + F_{тр}. & (1) \\ \frac{P_2}{g}\ddot{Y}_c = \sum F^e_{ky} = N_2 - P_2 = 0 & (2) \\ J_{cz}\ddot{\varphi}_2 = \sum M_{cz}(\bar{F}^e_k) = T_2 r_2 - F_{тр}\cdot R_2 & (3) \end{cases}$$

Так как направление и величина силы трения неизвестны, направить ее можно в любую сторону. Если в результате расчета получается $F_{тр} < 0$, значит направление вектора $\bar{F}_{тр}$ противоположно выбранному.

Исключим из уравнений (1) и (3) неизвестный параметр $F_{тр}$. Для этого преобразуем их, а затем сложим почленно.

Учтем, что

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{X}_c}{R_2} = \frac{\ddot{X}_c}{2r}; \quad J_{cz} = \frac{P_2}{g} i_2^2 = \frac{2P}{g}\cdot 2r^2 = \frac{4Pr^2}{g}; \quad T_2 = 0{,}902\,P; \quad P_2 = 2P$$

$$\begin{cases} \frac{2P}{g}\ddot{X}_c = -F + T_2 + F_{тр} \\ \frac{4Pr^2}{g}\cdot\frac{\ddot{X}_c}{2r} = 0{,}902P\cdot r - F_{тр}\cdot 2r \end{cases} \Bigg| \; /2r$$

$$\begin{cases} \frac{2P}{g}\ddot{X}_c = -P + 0{,}902P + F_{тр} \\ \cancel{\frac{2Pr}{g}} \; \frac{P}{g}\ddot{X}_c = \frac{0{,}902P}{2} - F_{тр} \end{cases} \Bigg| \; +$$

$$\frac{2P}{g}\ddot{X}_c + \frac{P}{g}\ddot{X}_c = -P + 0{,}902P + F_{тр} + \frac{0{,}902}{2}P - F_{тр} = P(1{,}5\cdot 0{,}902 - 1)$$

Отсюда находим

$$\underline{\underline{a_{c2}}} = \ddot{X}_c = \frac{P\cdot(1{,}5\cdot 0{,}902 - 1)}{3P}\cdot g = \frac{1{,}5\cdot 0{,}902 - 1}{3}\cdot 9{,}81 = \underline{1{,}154 \text{ м/с}^2}$$

Для проверки найдем эту же величину из задачи 1.

$$V_c = 2V_1, \quad a_c = \frac{dV_c}{dt}; \quad a_1 = \frac{dV_1}{dt} = const$$

$$a_c = 2a_1 = 2\cdot 0{,}577 = 1{,}154 \text{ м/с}^2$$

Для определения реакций на оси O_3 составим уравнения равновесия тела 3 (см. рис. для диска 3)

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_x = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_y + T_2 - T_1 - T_4 - P_3 = 0 \Rightarrow R_y = T_1 + T_4 + \overset{4P}{P_3} - T_2 = 0$$

$$R_y = P(0{,}941 + 1{,}176 + 4 - 0{,}902) = 5{,}215\,P$$

$$\underline{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \underline{5{,}215\,P}$$