Решить дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (специального вида) методом контурного интегрирования.

$$zw''(z)+(z+4)w'(z)+2w(z)=0$$

Решение:

1. Решение ищется в виде контурного интеграла типа Лапласа:

$$w(z)=\int\limits_c v(t)e^{zt}dt$$

То есть, $w(z)$ в таком виде формально подставляется в уравнение, и определяются функция $v(t)$ и контур интегрирования c. Перепишем уравнение в следующем виде:

$$zw''(z)+zw'(z)+4w'(z)+2w(z)=0$$

И вычислим отдельно $zw''(z)$, $zw'(z)$ и $w'(z)$:

$$w'(z)=\frac{d}{dz}\int\limits_c v(t)e^{zt}dt=\int\limits_c \frac{d}{dz}v(t)e^{zt}dt=\int\limits_c v(t)te^{zt}dt$$

$$w''(z)=\int\limits_c v(t)t^2e^{zt}dt$$

$$zw''(z)=z\int\limits_c v(t)t^2e^{zt}dt=\int\limits_c v(t)t^2ze^{zt}dt=\begin{bmatrix}\text{проинтегрируем}\\ \text{по частям}\end{bmatrix}=\int\limits_c v(t)t^2\frac{d}{dt}(e^{zt})dt=$$

$$=v(t)t^2e^{zt}|_c-\int\limits_c \frac{d}{dt}(v(t)t^2)e^{zt}dt=v(t)t^2e^{zt}|_c-\int\limits_c (v'(t)t^2+v(t)2t)e^{zt}dt$$

$$zw'(z)=z\int\limits_c v(t)te^{zt}dt=\int\limits_c v(t)tze^{zt}dt=\begin{bmatrix}\text{проинтегрируем}\\ \text{по частям}\end{bmatrix}=\int\limits_c v(t)t\frac{d}{dt}(e^{zt})dt=$$

$$=v(t)te^{zt}|_c-\int\limits_c \frac{d}{dt}(v(t)t)e^{zt}dt=v(t)te^{zt}|_c-\int\limits_c \big(v'(t)t+v(t)\big)e^{zt}dt$$

Теперь подставим $zw''(z)$, $zw'(z)$, $w'(z)$ и $w(z)$ в уравнение:

$$\left[v(t)t^2e^{zt}|_c-\int\limits_c (v'(t)t^2+v(t)2t)e^{zt}dt\right]+\left[v(t)te^{zt}|_c-\int\limits_c \big(v'(t)t+v(t)\big)e^{zt}dt\right]$$
$$+4\int\limits_c v(t)te^{zt}dt+2\int\limits_c v(t)e^{zt}dt=0$$

Сгруппируем подынтегральные и внеинтегральные части:

$$\int\limits_c [-v'(t)t^2-v(t)2t-v'(t)t-v(t)+4v(t)t+2v(t)]e^{zt}dt+[v(t)t^2e^{zt}+v(t)te^{zt}]|_c=0$$

Упростим:

$$\int\limits_c [-v'(t)(t^2+t)-v(t)(2t+1-4t-2)]e^{zt}dt+v(t)(t^2+t)e^{zt}|_c=0$$

$$\int_c [-v'(t)(t^2+t)+v(t)(2t+1)]e^{zt}dt + v(t)(t^2+t)e^{zt}|_c = 0$$

2. Для того чтобы выполнялось это равенство, достаточно потребовать, чтобы выполнялись два соотношения:

$$v(t)(t^2+t)e^{zt}|_c = 0$$

$$-v'(t)(t^2+t)+v(t)(2t+1) = 0$$

Второе соотношение будет использоваться для нахождения функции $v(t)$, а первое – для определения контура интегрирования c.

3. Находим функцию $v(t)$. Для этого решаем дифференциальное уравнение:

$$-v'(t)(t^2+t)+v(t)(2t+1) = 0$$

Его можно решить методом разделения переменных.

$$\frac{v'}{v} = \frac{2t+1}{t^2+t} \Leftrightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{2t+1}{t^2+t} \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2t+1}{t^2+t}dt$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2t+1}{t^2+t}dt$$

$$\ln v = \int \frac{2t+1}{t^2+t}dt$$

Теперь надо посчитать интеграл. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{2t+1}{t^2+t} = \frac{2t+1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} = \frac{t(A+B)+A}{t(t+1)}$$

Значит $A = 1, A + B = 2 \rightarrow B = 1$

$$\int \frac{2t+1}{t^2+t}dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{t+1}dt = \ln t + \ln(t+1) + D = \ln D(t+1)t$$

где D – произвольная постоянная.

Итак:

$$\ln v = \ln D(t+1)t$$
$$v = D(t+1)t$$

Нас интересуют хоть какие-то нетривиальные решения, поэтому удобно считать $D = 1$. Тогда решение исходного уравнения будет иметь вид:

$$w(z) = \int_c (t+1)te^{zt}dt$$

4. Теперь самое интересное – нужно найти контуры интегрирования, такие, чтобы, во-первых, выполнялось условие:

$$v(t)(t^2+t)e^{zt}|_c = 0$$

А во-вторых, интеграл

$$w(z) = \int_c (t+1)te^{zt}dt$$

сходился бы, или же существовал в обычном смысле. Сразу отметим, что подынтегральная функция $(t+1)te^{zt}$ регулярна на всей комплексной плоскости, поэтому интеграл по любому замкнутому контуру обратится в ноль, что нам явно не интересно.

Условие на контур, с учётом найденной функции $v(t)$, запишется в виде:

$$(t^2+t)^2e^{zt}|_c = 0$$

Функция $(t^2+t)^2e^{zt}$ обращается в ноль в двух точках: $t=0$ и $t=-1$. Поэтому, если в качестве одного из контуров мы выберем отрезок $[-1{,}0]$ вдоль вещественной оси, то приращение внеинтегральной подстановки будет равно нулю (то есть будет выполнено условие на контур, написанное выше). И, кроме того, интеграл

$$\int_{-1}^{0} (t+1)te^{zt}dt$$

будет существовать в обычном смысле.

Мы знаем, что, поскольку у нас дифференциальное уравнение второго порядка, существует два линейно независимых решения. Вообще говоря, контуров интегрирования можно придумать много, но мы ограничимся тем, что найдём ещё один и, соответственно, ещё одно решение нашего уравнения. И, если первое и второе решение окажутся линейно независимыми, то мы будем считать, что описали фундаментальную систему решений исходного уравнения.

Итак, как уже говорилось выше, замкнутые контуры нам не подходят. Поэтому единственный способ получить нетривиальный интеграл и удовлетворить условию на контур – это увести один из концов контура на бесконечность. При этом, если контур будет начинаться в точке, где $(t^2+t)^2e^{zt}$ обращается в ноль и, при этом, вдоль контура экспонента e^{zt} будет убывать на бесконечности, то и условие на контур будет выполняться, и интеграл будет сходиться (так как, если экспонента будет убывать на бесконечности, то и подынтегральная функция $(t+1)te^{zt}$ будет убывать на бесконечности).

Основная неприятность здесь заключается в том, что направления, в которых экспонента e^{zt} убывает, зависят от z. Здесь мы можем сразу немного упростить ситуацию и считать, что z – вещественна (по условию). А t, вообще говоря, комплексная, и представима в виде $t=a+ib$. Тогда экспонента представима в виде:

$$e^{zt} = e^{z(a+ib)} = e^{az}e^{ibz}$$

Вторая экспонента – периодическая функция, и на убывание e^{zt}влияет только первая. А именно, её показатель должен убывать до $-\infty$. Тогда интеграл будет сходиться, и внеинтегральная подстановка на концах контура будет обращаться в ноль. Удобнее всего интегрировать по t вдоль вещественной оси. Заметим, что при значении $z = 0$, интеграл $w(z)$ принимает значение:

$$\int_{C} (t+1)t\,dt$$

и не сходится на бесконечности ни в каком направлении. Поэтому второе решение будет иметь особенности в точке $z = 0$.

Пусть $z < 0$. Тогда в качестве контура интегрирования можно выбрать $[0, +\infty)$. Итак, у нас есть два решения:

$$w_1(z) = \int_{C_1} (t+1)te^{zt}dt\,, \qquad \text{где } C_1 = [-1{,}0]$$

$$w_2(z) = \int_{C_2} (t+1)te^{zt}dt\,, \qquad \text{где } C_2 = [0, +\infty) \text{ при } z < 0$$

Теперь посчитаем эти интегралы. Для начала вычислим первообразную, интегрируя по частям:

$$\int (t+1)te^{zt}dt = \frac{1}{z}\int (t^2+t)(e^{zt})'dt = \frac{1}{z}(t^2+t)e^{zt} - \frac{1}{z}\int (2t+1)e^{zt}dt = \frac{1}{z}(t^2+t)e^{zt} -$$
$$-\frac{1}{z^2}\int (2t+1)(e^{zt})'dt = \frac{1}{z}(t^2+t)e^{zt} - \frac{1}{z^2}(2t+1)e^{zt} + \frac{1}{z^2}\int 2e^{zt}dt =$$
$$= \frac{1}{z}(t^2+t)e^{zt} - \frac{1}{z^2}(2t+1)e^{zt} + \frac{2}{z^3}e^{zt}$$

и подставим в решения:

$$w_1(z) = \int_{-1}^{0} (t+1)te^{zt}dt = \frac{1}{z}(t^2+t)e^{zt} - \frac{1}{z^2}(2t+1)e^{zt} + \frac{2}{z^3}e^{zt}\Big|_{-1}^{0}$$
$$= \left[-\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right] - \left[\frac{1}{z^2}e^{-z} + \frac{2}{z^3}e^{-z}\right]$$

$$w_2(z) = \int_{0}^{+\infty} (t+1)te^{zt}dt = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{z}(t^2+t)e^{zt} - \frac{1}{z^2}(2t+1)e^{zt} + \frac{2}{z^3}e^{zt}\Big|_{0}^{A}\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{z}(A^2+A)e^{zA} - \frac{1}{z^2}(2A+1)e^{zA} + \frac{2}{z^3}e^{zA}\right) - \left[-\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right] = \begin{bmatrix}\text{с учётом того,}\\ \text{что } z < 0\end{bmatrix} = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3}$$

Очевидно, что $w_1(z)$ и $w_2(z)$ линейно независимы.

5. *Ответ:* Фундаментальная система решений уравнения

$$zw''(z) + (z+4)w'(z) + 2w(z) = 0$$

описывается двумя линейно независимыми решениями:

$$w_1(z) = \left[-\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right] - \left[\frac{1}{z^2}e^{-z} + \frac{2}{z^3}e^{-z}\right]$$
$$w_2(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} \text{ при } z < 0$$