

1. Решить матричное уравнение: $AXB = 2C + E$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Перепишем правую часть в матричном виде для удобства:

$$2C + E = 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножим уравнение слева на матрицу обратную A (A^{-1}), а справа на матрицу, обратную B (B^{-1}):

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$$

Воспользуемся тем, что $A^{-1}A = BB^{-1} = E$ – единичная матрица :

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$$

Теперь посчитаем обратные матрицы A^{-1} и B^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_*^T = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B_*^T = \frac{1}{3 \cdot 1 - 1 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 17 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$$

2. Исследовать совместность и найти общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли: для того, чтобы алгебраическая система являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу её основной матрицы.

Основная матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Найдём $\text{rang } A$:

Умножим вторую строчку на 3 и вычтем из неё первую; умножим третью строчку на 3 и вычтем из неё первую, умноженную на 5; умножим четвёртую строчку на 3 и вычтем из неё первую. Получим:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 14 & 14 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем из второй строки четвёртую, домноженную на 7; вычтем из третьей строки четвёртую, домноженную на 14:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили 2 ненулевых строки, значит $\text{rang } A = 2$.

2.2. Найдём $\text{rang } \bar{A}$:

Произведём те же два шага, что и при вычислении $\text{rang } A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & 14 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Получили 2 ненулевых строки, значит $\text{rang } \bar{A} = 2$

$$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$$

Значит, система совместна.

2.3 Решим систему методом Гаусса. Воспользуемся результатами вычисления ранга расширенной матрицы и сразу выкинем строки, которые обращаются в ноль.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Вычтем из 1ой строки 2ую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Поделим 1ую строчку на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Теперь принимаем переменную x_3 за свободную и обозначаем как C .

$$\begin{cases} x_1 - C = -1 \\ x_2 + C = 2 \\ x_3 = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = C - 1 \\ x_2 = -C + 2 \\ x_3 = C \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

где C – произвольна.