mmp3396

Пример выполнения решения задачи по сопротивлению материалов.

Расчеты на прочность и жесткость стержня при растяжении (сжатии).

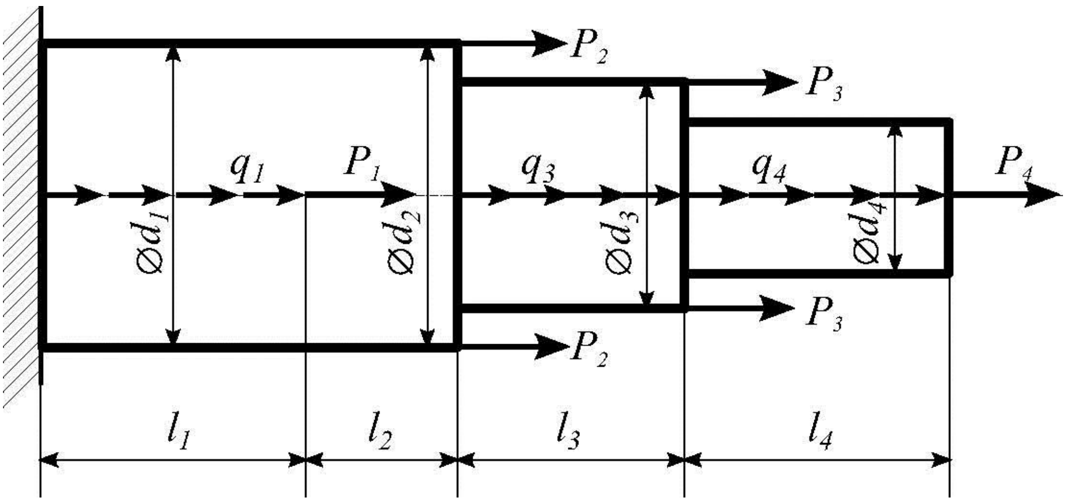
Задание.

Задан ступенчатый стержень, нагруженный внешними сосредоточенными силами P_i $(i = 1, \ldots , 4)$ и распределенными нагрузками q_j $(j = 1, \ldots, 4)$. При расчетах принять: распределенная нагрузка q=2 кН/см; q_2=0; длина l=50 см; сила P=0,5ql=50 кН; модуль упругости материала стержня при растяжении (сжатии) $E=2\cdot10^5$ МПа; предел текучести материала стержня $\sigma_т$=300 МПа; допускаемое перемещение $[\delta]=2\cdot10^{-4}$ м.

Необходимо для ступенчатого стержня выполнить следующее.

1. Начертить индивидуальную расчетную схему стержня.
2. Построить эпюру нормальных сил N_z в долях P.
3. Построить эпюру нормальных напряжений σ_z в долях P/F, где $F=\pi d^2/4$ – площадь сечения диаметром d стержня.
4. Построить эпюру перемещений Δz в долях Pl/EF.
5. Найти диаметры поперечных сечений участков стержня из условия прочности при заданном коэффициенте запаса прочности $n_т$.
6. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости стержня.

Обобщенная расчетная схема:



Из таблицы вариантов заданий для варианта 5132 имеем:

$l_1=3l$,	$d_1=2d$,	$P_1=-3P$,	$q_1=-q$,
$l_2=2l$,	$d_2=2d$,	$P_2=5P$,	$q_3=2q$,
$l_3=2l$,	$d_3=0{,}5d$,	$P_3=-5P$,	$q_4=2q$,
$l_4=3l$,	$d_4=4d$,	$P_4=-8P$,	$n_т$=2,5.

Решение.

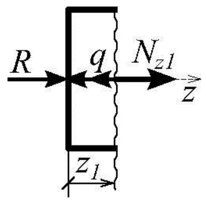
1. Вычерчиваем индивидуальную расчетную схему стержня (чертеж 1.2.1) в соответствии с приведенными выше данными. При положительных значениях P_i или q_j их направления, показанные на обобщенной расчетной схеме, сохраняем неизменными. Если P_i или q_j заданы отрицательными, то в индивидуальной расчетной схеме их направления изменяем на противоположные, а их значения в дальнейших расчетах принимаем положительными.
2. Определяем реакцию опоры из условия статического равновесия стержня

$$\sum Z = R - q \cdot 3l - 3P + 10P + 2q \cdot 2l - 10P + 2q \cdot 3l - 8P = 0,$$

откуда получаем (учитывая, что $ql = 2P$): $R = -7ql + 11P == -7 \cdot 2P + 11P = -3P$.

3. Используя метод сечений, определяем законы изменения нормальной силы на участках стержня.

Первый участок:

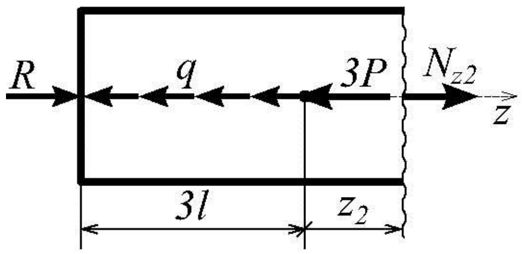


$\sum Z = R - qz_1 + N_{z1} = 0$, $N_{z1} = qz_1 - R = qz_1 + 3P$.

При $z_1 = 0$ $N_{z1} = 3P$,

при $z_1 = 3l$ $N_{z1} = 3ql + 3P = 3 \cdot 2P + 3P = 9P$.

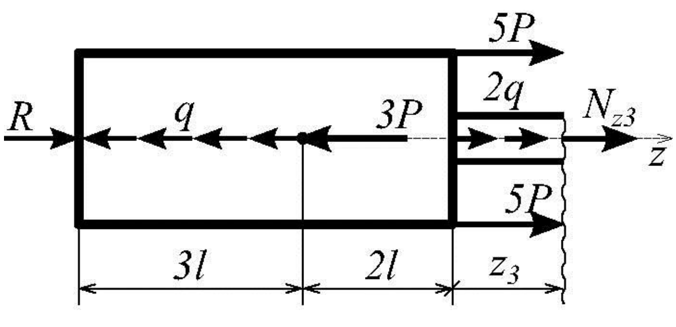
Второй участок:



$\sum Z = R - 3ql - 3P + N_{z2} = 0$,

тогда $N_{z2} = 3ql + 3P - R = 3 \cdot 2P + 3P + 3P$=12P.

Третий участок:



$\sum Z = R - 3ql - 3P + 10P + 2qz_3 + N_{z3} = 0$,

$N_{z3} = 3ql - 7P - 2qz_3 - R = 2P - 2qz_3$.

При $z_3 = 0$ $N_{z3} = 2P$,

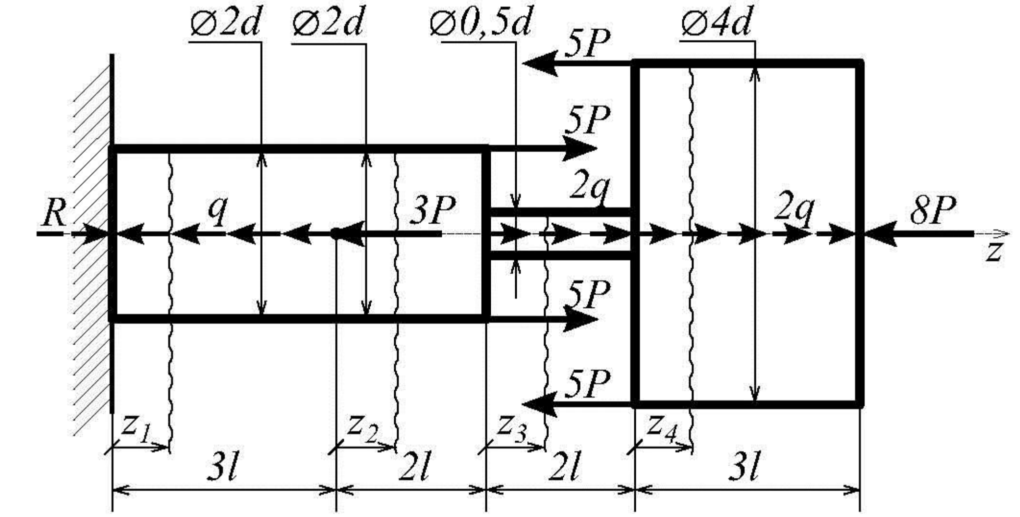
при $z_3 = 2l$

$N_{z3} = 2P - 4ql = 2P - 8P = -6P$.

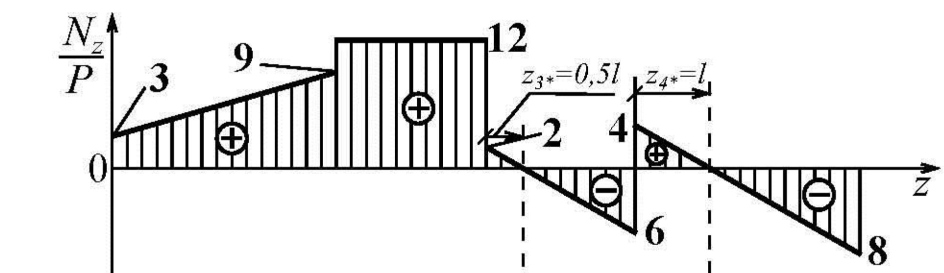
Видно, что непрерывная функция N_{z3} меняет знак. Следовательно, она принимает нулевое значение $N_{z3} = 2P - 2qz_{3*} = 2 \cdot 0{,}5ql - 2qz_{3*} = 0$ при $z_{3*} = 0{,}5l$.

Чертеж 1.2.

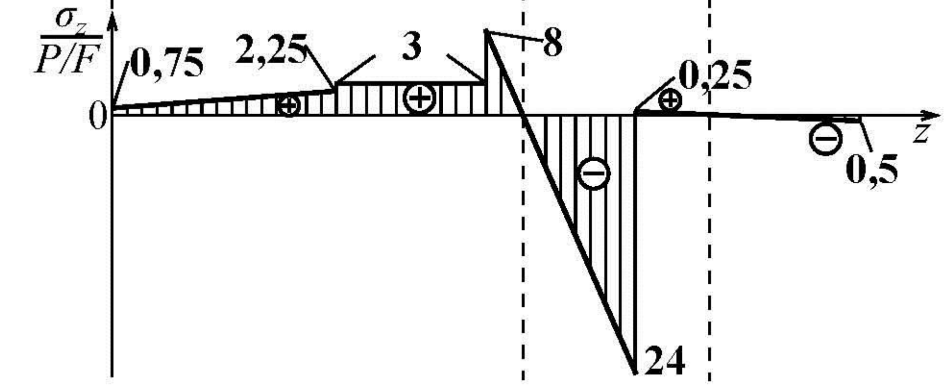
(1)



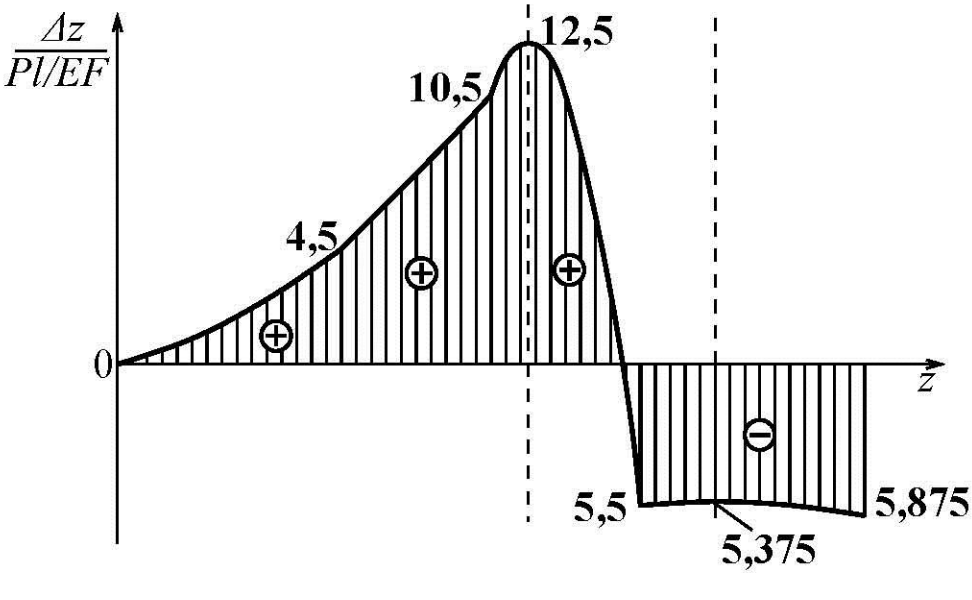
(2)



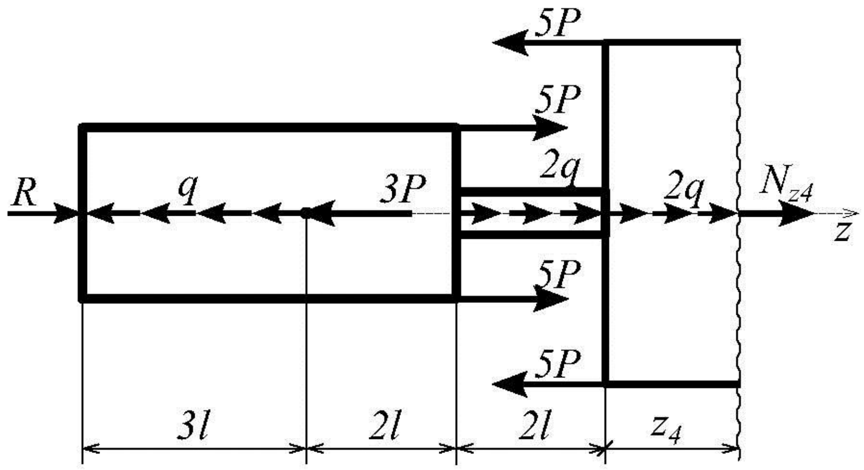
(3)



(4)



Четвертый участок:



$$\sum Z = R - 3ql - 3P + 10P + 4ql - 10P + 2qz_4 + N_{z4} = 0,\ N_{z4} = 4P - 2qz_4.$$

При $z_4 = 0 \quad N_{z4} = 4P$, при $z_4 = 3l\ \ N_{z4} = 4P - 6ql = 4P - 12P = -8P$.

Функция N_{z4} меняет знак. Она принимает нулевое значение

$$N_{z4} = 4P - 2qz_{4*} = 4 \cdot 0{,}5ql - 2qz_{4*} = 0 \text{ при } z_{4*} = l.$$

По полученным значениям N_z строим эпюру нормальных сил (чертеж 1.2.2).

4. Обозначаем площадь поперечного сечения диаметром d через $F = \frac{\pi d^2}{4}$ и выражаем через F площади поперечных сечений участков стержня:

$$F_1 = \frac{\pi \cdot (2d)^2}{4} = 4F, \qquad F_2 = 4F, \qquad F_3 = \frac{\pi \cdot (0{,}5d)^2}{4} = 0{,}25F, \qquad F_4 = \frac{\pi \cdot (4d)^2}{4} = 16F.$$

5. Вычисляем нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях, на участках стержня.

Первый участок: $\sigma_{z1} = \frac{N_{z1}}{F_1} = \frac{qz_1+3P}{4F}$.

При $z_1 = 0\ \ \sigma_{z1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{F} = 0{,}75\frac{P}{F}$, при $z_1 = 3l\ \ \ \sigma_{z1} = \frac{3ql+3P}{4F} = \frac{3 \cdot 2P+3P}{4F} = 2{,}25\frac{P}{F}$.

Второй участок: $\sigma_{z2} = \frac{N_{z2}}{F_2} = \frac{12P}{4F} = 3\frac{P}{F}$.

Третий участок: $\sigma_{z3} = \frac{N_{z3}}{F_3} = \frac{2P-2qz_3}{0{,}25F}$.

При $z_3 = 0\ \ \sigma_{z3} = 8\frac{P}{F}$, при $z_3 = 2l\ \ \ \sigma_{z3} = \frac{2P-4ql}{0{,}25F} = \frac{2P-4 \cdot 2P}{0{,}25F} = -24\frac{P}{F}$.

Четвертый участок: $\sigma_{z4} = \frac{N_{z4}}{F_4} = \frac{4P-2qz_4}{16F}$.

При $z_4 = 0\ \ \sigma_{z4} = 0{,}25\frac{P}{F}$, при $z_4 = 3l\ \ \ \sigma_{z4} = \frac{4P-6ql}{16F} = \frac{4P-6 \cdot 2P}{16F} = -0{,}5\frac{P}{F}$.

По полученным значениям σ_z строим эпюру нормальных напряжений в долях P/F (чертеж 1.2.3).

6. Используя закон Р.Гука в интегральной форме, находим перемещения на участках стержня.

Первый участок: $\Delta z_1 = \int_0^{z_1} \frac{N_{z1} dz_1}{EF_1} = \int_0^{z_1} \frac{(qz_1+3P)dz_1}{E \cdot 4F} = \frac{0{,}5qz_1^2+3Pz_1}{4EF}$.

При $z_1 = 0\ \ \Delta z_1 = 0$, при $z_1 = l\ \ \Delta z_1 = \frac{0{,}5ql^2+3Pl}{4EF} = \frac{0{,}5l \cdot 2P+3Pl}{4EF} = 1 \cdot \frac{Pl}{EF}$,

при $z_1 = 2l\ \ \Delta z_1 = \frac{0{,}5q \cdot 4l^2+3P \cdot 2l}{4EF} = \frac{2l \cdot 2P+6Pl}{4EF} = 2{,}5 \cdot \frac{Pl}{EF}$, при $z_1 = 3l$ $\Delta z_1 = \frac{0{,}5q\cdot 9l^2 + 3P\cdot 3l}{4EF} = \frac{4{,}5l\cdot 2P + 9Pl}{4EF} = 4{,}5\cdot\frac{Pl}{EF}$.

Кривизну квадратной параболы Δz_1 определим по знаку второй производной. Поскольку $\frac{d^2(\Delta z_1)}{dz_1^2} = \frac{q}{4EF} > 0$, то функция Δz_1 на этом участке является вогнутой.

Второй участок: $\Delta z_2 = \delta_{\text{нк}2} + \int_0^{z_2}\frac{N_{z2}dz_2}{EF_2} = \delta_{\text{нк}2} + \int_0^{z_2}\frac{12P\,dz_2}{E\cdot 4F} = \delta_{\text{нк}2} + \frac{3Pz_2}{EF}$.

Перемещение начала координат второго участка равно $\delta_{\text{нк}2} = \Delta z_1|_{z_1=3l} = 4{,}5\frac{Pl}{EF}$. С учетом этого получаем $\Delta z_2 = 4{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{3Pz_2}{EF}$.

При $z_2 = 0$ $\Delta z_2 = 4{,}5\frac{Pl}{EF}$, при $z_2 = 2l$ $\Delta z_2 = 4{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{3P\cdot 2l}{EF} = 10{,}5\frac{Pl}{EF}$.

Третий участок: $\Delta z_3 = \delta_{\text{нк}3} + \int_0^{z_3}\frac{N_{z3}dz_3}{EF_3} = \delta_{\text{нк}3} + \int_0^{z_3}\frac{(2P-2qz_3)dz_3}{E\cdot 0{,}25F} = \delta_{\text{нк}3} + \frac{2Pz_3 - qz_3^2}{0{,}25EF}$.

Перемещение начала координат третьего участка равно $\delta_{\text{нк}3} = \Delta z_2|_{z_2=2l} = 10{,}5\frac{Pl}{EF}$. С учетом этого получаем $\Delta z_3 = 10{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{2Pz_3 - qz_3^2}{0{,}25EF}$.

При $z_3 = 0$ $\Delta z_3 = 10{,}5\frac{Pl}{EF}$, при $z_3 = l$ $\Delta z_3 = 10{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{2Pl - ql^2}{0{,}25EF} = 10{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{2Pl - 2Pl}{0{,}25EF} = 10{,}5\frac{Pl}{EF}$,

при $z_3 = 2l$ $\Delta z_3 = 10{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{2P\cdot 2l - q(2l)^2}{0{,}25EF} = 10{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{4Pl - 8Pl}{0{,}25EF} = -5{,}5\frac{Pl}{EF}$.

Поскольку $\frac{d^2(\Delta z_3)}{dz_3^2} = -\frac{8q}{EF} < 0$, то функция Δz_3 на этом участке является выпуклой.

Так как в двух точках участка Δz_3 принимает одинаковые значения, то, значит, она имеет на этом участке экстремум. Определим точку экстремума и значение его. Первая производная должна быть равна нулю:

$\frac{d(\Delta z_3)}{dz_3} = 2P - 2qz_{3*} = 0$, откуда $z_{3*} = \frac{P}{q} = \frac{Pl}{ql} = \frac{Pl}{2P} = 0{,}5l$,

и при $z_3 = 0{,}5l$ $\Delta z_3 = 10{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{2P\cdot 0{,}5l - q(0{,}5l)^2}{0{,}25EF} = 12{,}5\frac{Pl}{EF}$.

Четвертый участок: $\Delta z_4 = \delta_{\text{нк}4} + \int_0^{z_4}\frac{N_{z4}dz_4}{EF_4} = \delta_{\text{нк}4} + \int_0^{z_4}\frac{(4P-2qz_4)dz_4}{E\cdot 16F} = \delta_{\text{нк}4} + \frac{4Pz_4 - qz_4^2}{16EF}$.

Перемещение начала координат четвертого участка равно $\delta_{\text{нк}4} = \Delta z_3|_{z_3=2l} = -5{,}5\frac{Pl}{EF}$. С учетом этого получаем $\Delta z_4 = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{4Pz_4 - qz_4^2}{16EF}$.

При $z_4 = 0$ $\Delta z_4 = -5{,}5\frac{Pl}{EF}$, при $z_4 = l$ $\Delta z_4 = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{4Pl - ql^2}{16EF} = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{4Pl - 2Pl}{16EF} = -5{,}375\frac{Pl}{EF}$,

при $z_4 = 2l$ $\Delta z_4 = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{4P\cdot 2l - q(2l)^2}{16EF} = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{8Pl - 8Pl}{16EF} = -5{,}5\frac{Pl}{EF}$,

при $z_4 = 3l$ $\Delta z_4 = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{4P\cdot 3l - q(3l)^2}{16EF} = -5{,}5\frac{Pl}{EF} + \frac{12Pl - 18Pl}{16EF} = -5{,}875\frac{Pl}{EF}$.

Поскольку $\frac{d^2(\Delta z_4)}{dz_4^2} = -\frac{q}{8EF} < 0$, то функция Δz_3 на этом участке является выпуклой.

В точке $z_4 = l$ Δz_4 имеет экстремум со значением $-5{,}375\frac{Pl}{EF}$.

По вычисленным значениям Δz строим эпюру перемещений в долях *Pl*/*EF* (чертеж 1.2.3).