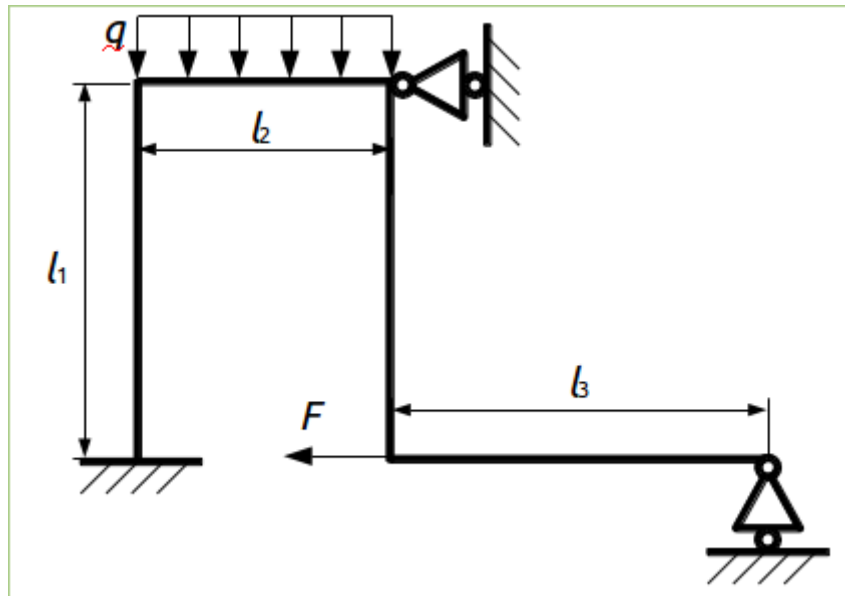


РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

Задание . Заданы схема статически неопределимой рамы, размеры и действующие нагрузки. Требуется

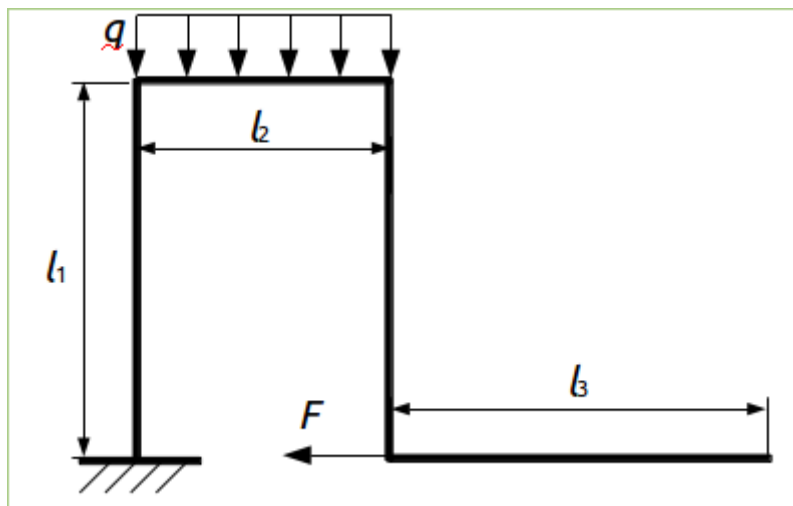
- раскрыть статическую неопределимость;
- построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов;
- подобрать размеры поперечного сечения, составленного из двух швеллеров.

Схема балки:

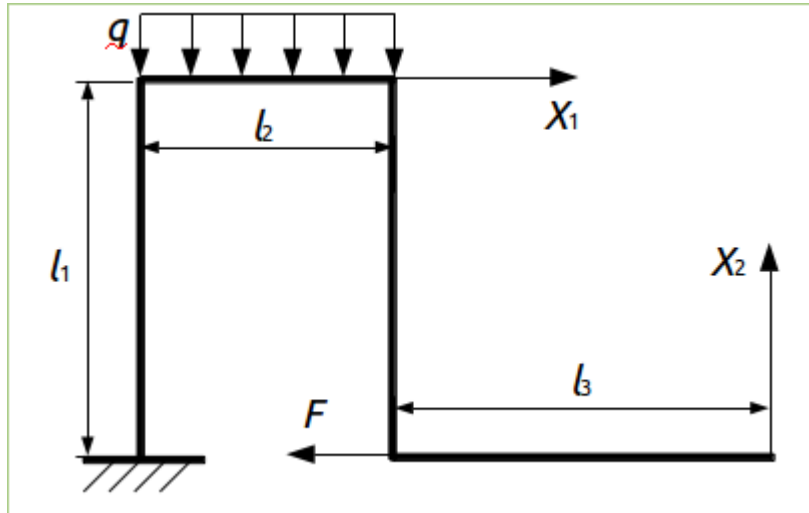


$$l_1 = l_3 = 3 \text{ м}, \quad l_2 = 2 \text{ м}, \quad q = 15 \text{ кН/м}, \quad F = 20 \text{ кН}.$$

Решение. Система дважды статически неопределима, так как для определения пяти реактивных усилий (три в жесткой заделке и по одной в каждой шарнирно-подвижной опоре) можно составить только три уравнения. Основную статически определимую систему получаем, отбрасывая шарнирно-подвижные опоры:



Заменяем их действие на раму неизвестными реакциями X_1, X_2 . В итоге получим эквивалентную систему:

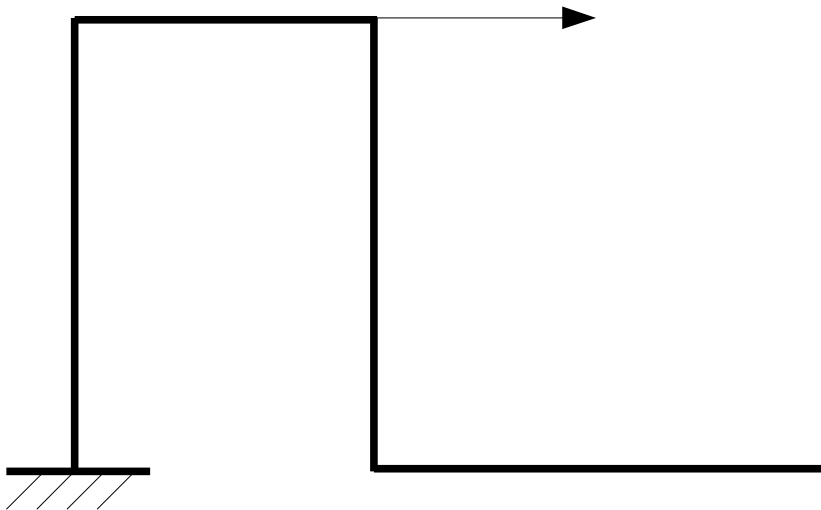


Система канонических уравнений:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{1P} = 0; \quad X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{2P} = 0.$$

Балка состоит из 4 участков, которые пронумеруем от правого конца до жесткого защемления (справа налево). Здесь и далее x_1 - расстояние от правого конца до сечения первого участка, x_2 - от нижнего конца до сечения второго участка, x_3 - от правого конца до сечения третьего участка, x_4 - от верхнего конца до сечения четвертого участка.

Эпюра изгибающих моментов под действием силы $\bar{X}_1 = 1$:

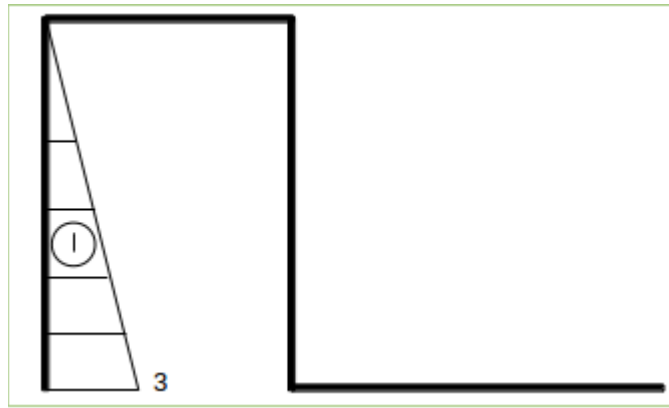


$$M_{11} = 0;$$

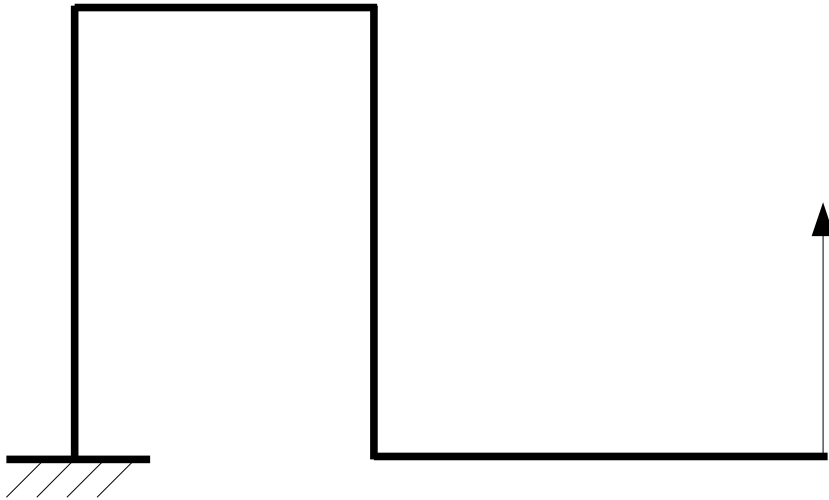
$$M_{12} = 0;$$

$$M_{13} = 0;$$

$$M_{14} = -\bar{X}_1 \cdot x_4 = -x_4; \quad M_{14}(0) = 0; \quad M_{14}(l_1) = -l_1 = -3.$$



Эпюра изгибающих моментов под действием силы $\bar{X}_2=1$:

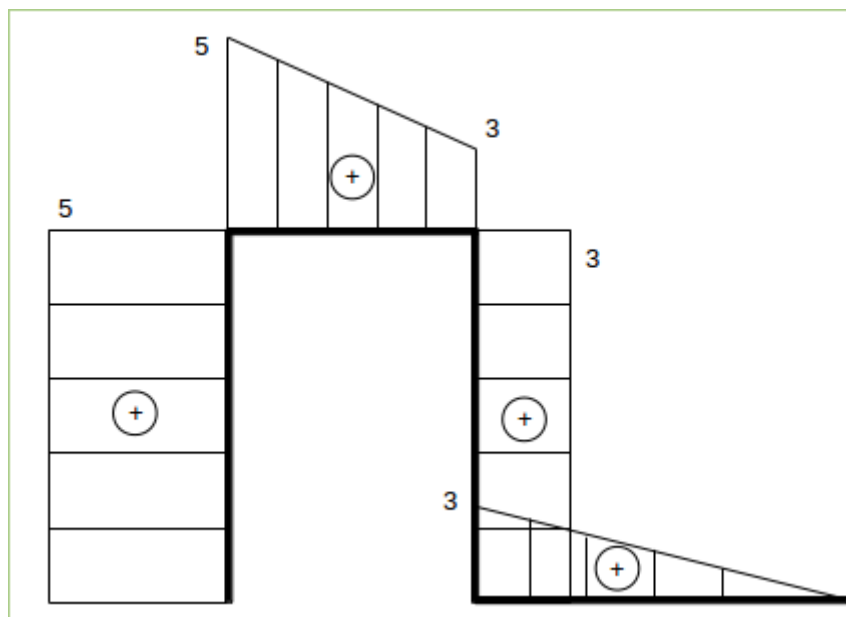


$$M_{21} = \bar{X}_2 \cdot x_1 = x_1; M_{21}(0) = 0; M_{21}(l_3) = l_3 = 3;$$

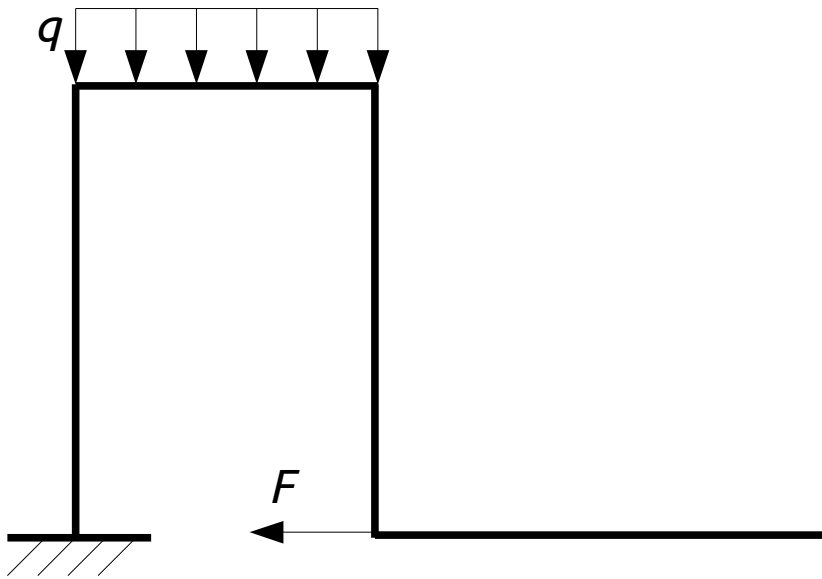
$$M_{22} = \bar{X}_2 \cdot l_3 = l_3 = 3;$$

$$M_{23} = \bar{X}_2 \cdot (l_3 + x_3) = 3 + x_3; M_{23}(0) = 3; M_{23}(l_2) = 3 + 2 = 5;$$

$$M_{24} = \bar{X}_2 \cdot (l_2 + l_3) = 5.$$



Эпюра изгибающих моментов под действием заданной нагрузки:

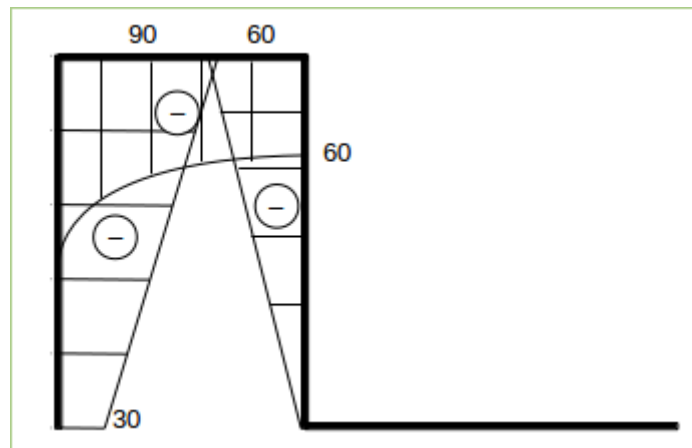


$$M_1 = 0;$$

$$M_2 = -F \cdot x_2 = -20x_2; M_2(0) = 0; M_2(l_1) = -60;$$

$$M_3 = -F \cdot l_1 - q \frac{x_3^2}{2} = -60 - 7,5x_3^2; M_3(0) = -60; M_3(l_2) = -90; (M_3)_{max} = M_3(0);$$

$$M_4 = -F(l_1 - x_4) - q \frac{l_2^2}{2} = -20(3 - x_4) - 30 = -90 + 20x_4; M_4(0) = -90; M_4(l_1) = -30.$$



Определяем перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l_1 \cdot M_{14} \left(\frac{2}{3} l_1 \right) \right) = \frac{9}{EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l_1 \cdot M_{24} \left(\frac{2}{3} l_1 \right) \right) = -\frac{45}{2EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \left(5l_1 \cdot M_{24} \left(\frac{l_1}{2} \right) + 4l_2 \cdot M_{23} \left(\frac{13}{24} l_2 \right) + 3l_1 \cdot M_{22} \left(\frac{l_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3l_3 \cdot M_{21} \left(\frac{2}{3} l_3 \right) \right) = \frac{431}{3EJ_z};$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l_1 \cdot M_4 \left(\frac{2}{3} l_1 \right) \right) = \frac{225}{EJ_z};$$

$$\delta_{2p} = -\frac{1}{EJ_z} \left(5l_1 \cdot M_4 \left(\frac{l_1}{2} \right) + \int_0^{l_2} (60 + 7,5x^2)(3+x) dx + 3l_1 \cdot M_2 \left(\frac{l_1}{2} \right) \right) = -\frac{1740}{EJ_z};$$

Система канонических уравнений примет вид:

$$9X_1 - \frac{45}{2}X_2 + 225 = 0; \quad -\frac{45}{2}X_1 + \frac{431}{3}X_2 - 1740 = 0.$$

$$18X_1 - 45X_2 + 450 = 0; \quad -135X_1 + 862X_2 - 10440 = 0.$$

$$X_1 = \frac{45X_2 - 450}{18} = \frac{5}{2}X_2 - 25;$$

$$-135 \left(\frac{5}{2}X_2 - 25 \right) + 862X_2 - 10440 = 0;$$

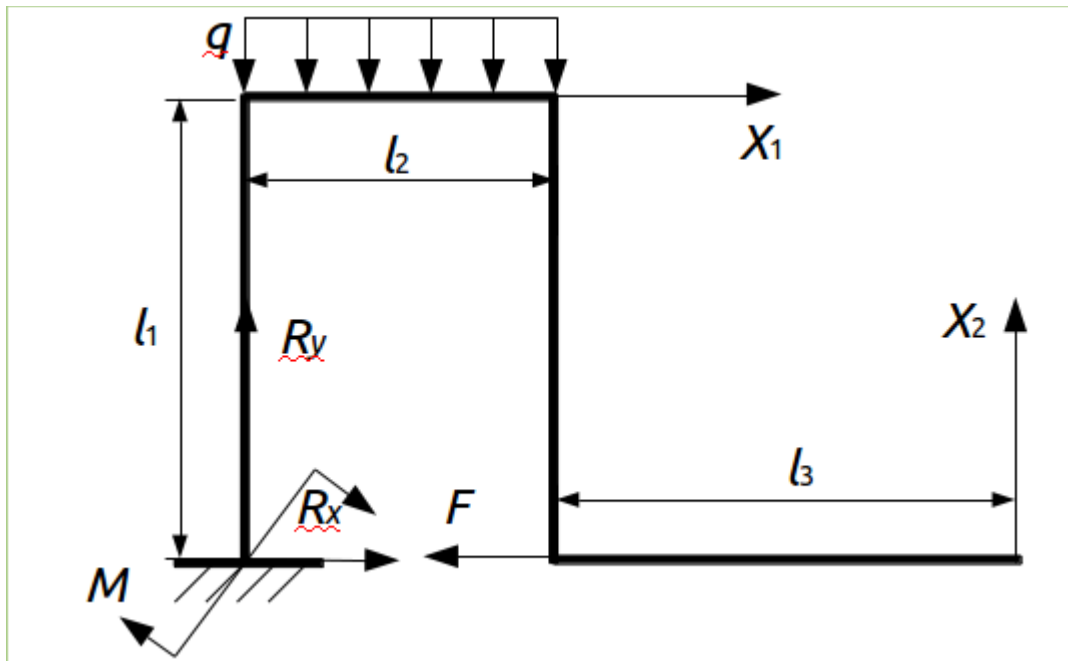
$$\frac{1049}{2}X_2 = 7065;$$

$$X_2 \approx 13,45;$$

$$X_1 = \frac{5}{2} \cdot 13,45 - 25 \approx 8,63.$$

Положительные значения указывают на то, что направления этих реакций были выбраны правильно.

Определим реакции опор в эквивалентной системе:



$$pr_x: R_x + X_1 - F = 0 \Rightarrow R_x + 8,63 - 20 = 0 \Rightarrow R_x = 11,37.$$

$$pr_y: R_y - ql_2 + X_2 = 0 \Rightarrow R_y - 30 + 13,45 = 0 \Rightarrow R_y = 16,55.$$

$$mom_A: -M - q \frac{l_2^2}{2} - X_1 l_1 + X_2 (l_2 + l_3) = 0 \Rightarrow -M - 30 - 25,89 + 67,25 = 0 \Rightarrow M = 11,36.$$

Строим эпюры моментов:

$$M_1 = X_2 x_1 = 13,45 x_1; M_1(0) = 0; M_1(l_3) = 40,35;$$

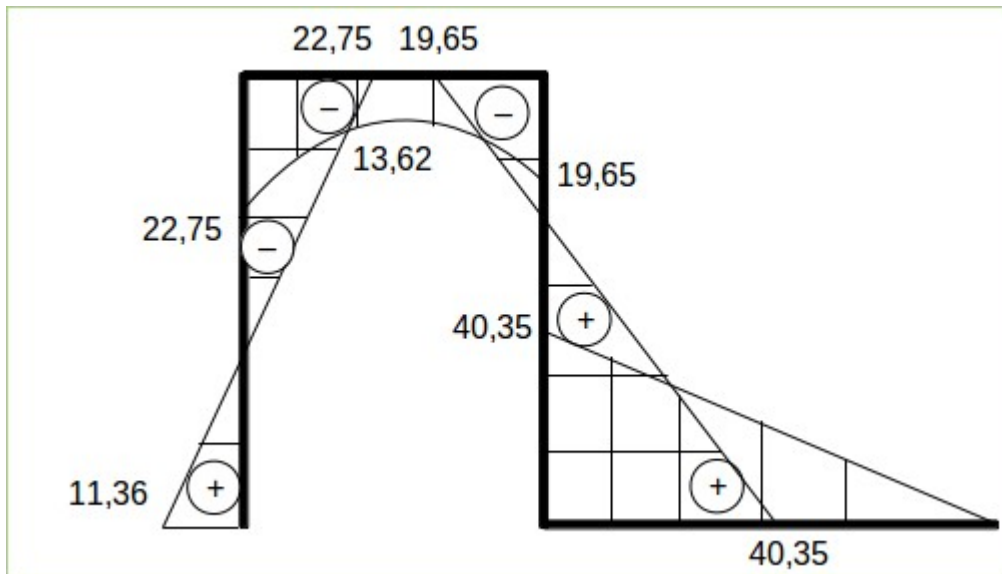
$$M_2 = X_2 l_3 - F x_2 = 40,35 - 20 x_2; M_2(0) = 40,35; M_2(l_1) = -19,65; M_3(x_2 \approx 2,02) = 0;$$

$$M_3 = X_2(l_3 + x_3) - Fl_1 - q \frac{x_3^2}{2} = 13,45(3 + x_3) - 60 - 7,5 x_3^2 = -7,5 x_3^2 + 13,45 x_3 - 19,65;$$

$$M_3(0) = -19,65; M_3(l_2) = -22,75; x_{max} \approx 0,9; M_3(x_{max}) = -13,62;$$

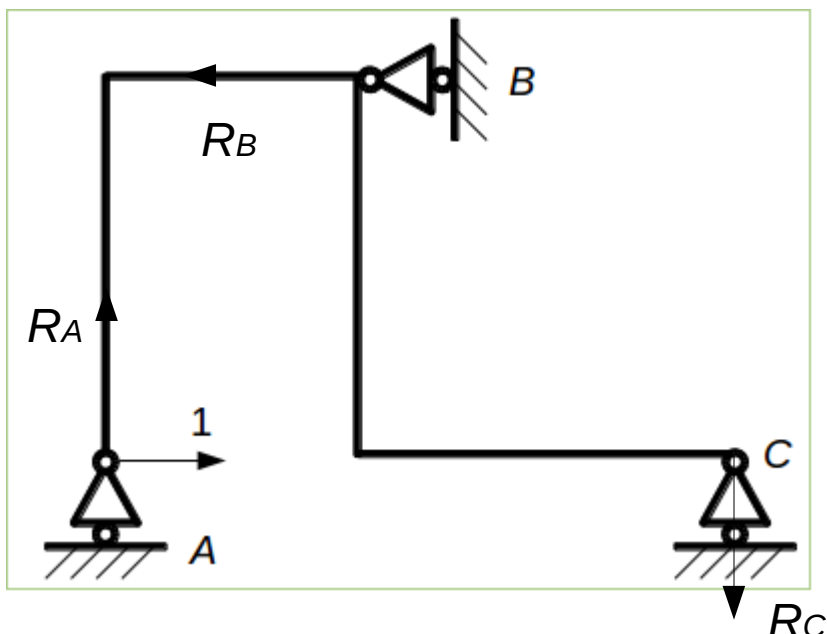
$$M_4 = X_2(l_2 + l_3) - F(l_1 - x_4) - X_1 x_4 - q \frac{l_2^2}{2} = 67,25 - 20(3 - x_4) - 8,63 x_4 - 30 = 11,37 x_4 - 22,75;$$

$$M_4(0) = -22,75; M_4(l_1) = 11,36; M_4(x_4 \approx 2) = 0.$$



Для проверки правильности построения эпюры суммарных изгибающих моментов поочередно умножим ее на эпюру от горизонтально приложенной единичной силы и от единичного момента в месте защемления (на самом деле мы заменяем защемление на шарнирно подвижную опору):

Нагружаем единичной силой:



$$pr_x: 1 - R_B = 0 \Rightarrow R_B = 1;$$

$$mom_A: R_B l_1 - R_C (l_2 + l_3) = 0 \Rightarrow 3 - 5 R_C = 0 \Rightarrow R_C = 0,6;$$

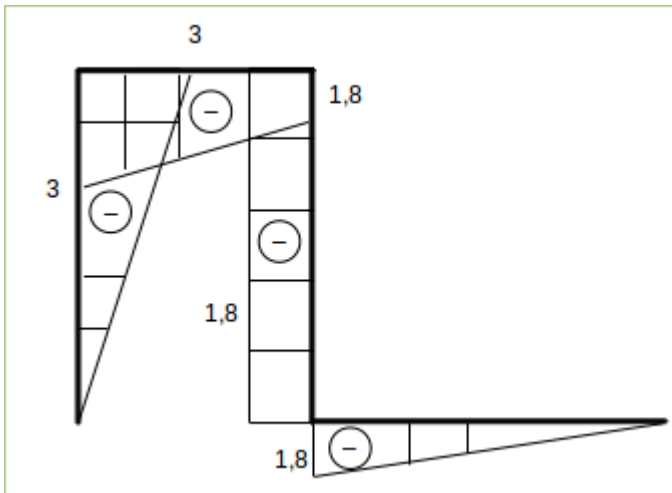
$$pr_y: R_A - R_C = 0 \Rightarrow R_A = R_C = 0,6.$$

$$M_{01} = -R_C x_1 = -0,6 x_1; M_{01}(0) = 0; M_{01}(l_3) = -1,8;$$

$$M_{02} = -R_C l_3 = -1,8;$$

$$M_{03} = -R_C (l_3 + x_3) = -0,6(3 + x_3) = -0,6 x_3 - 1,8; M_{03}(0) = -1,8; M_{03}(l_2) = -3;$$

$$M_{04} = -R_C (l_2 + l_3) + R_B x_4 = x_4 - 3; M_{04}(0) = -3; M_{04}(l_1) = 0.$$



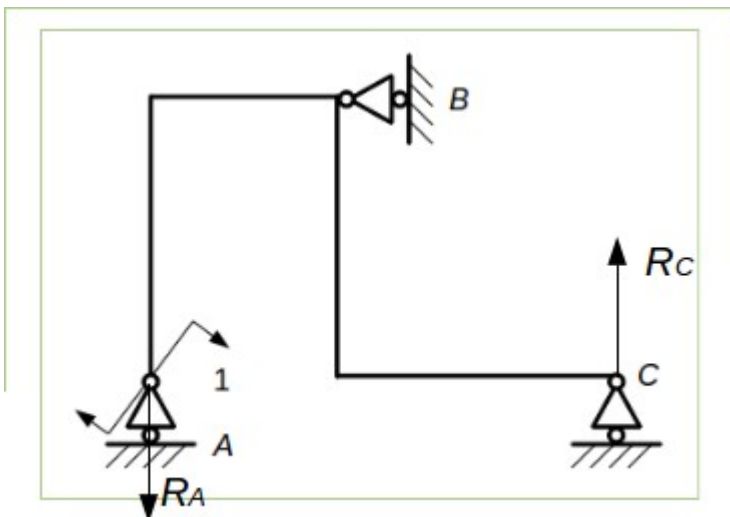
Проверяем, равно ли нулю перемещение в горизонтальном направлении:

$$EJ_z \delta = - \int_0^3 0,6 x \cdot 13,45 x dx - \int_0^3 1,8 (40,35 - 20 x) dx - \int_0^2 (0,6 x + 1,8) (-7,5 x^2 + 13,45 x - 19,65) dx + \int_0^3 (11,37 x - 22,75) (x - 3) dx = -72,63 - 55,89 + 78,38 + 51,21 = 1,07 \approx 0.$$

Погрешность, обусловленная приближенностью вычислений составляет:

$$\frac{1,07 \cdot 100}{\frac{128,52 + 129,59}{2}} \approx 0,83 \text{ \%}.$$

Нагружаем единичным моментом:



$pr_x: R_B=0$; Реакции в точке B нет.

$$mom_A: -1 + R_C(l_2 + l_3) = 0 \Rightarrow 5R_C = 1 \Rightarrow R_C = 0,2;$$

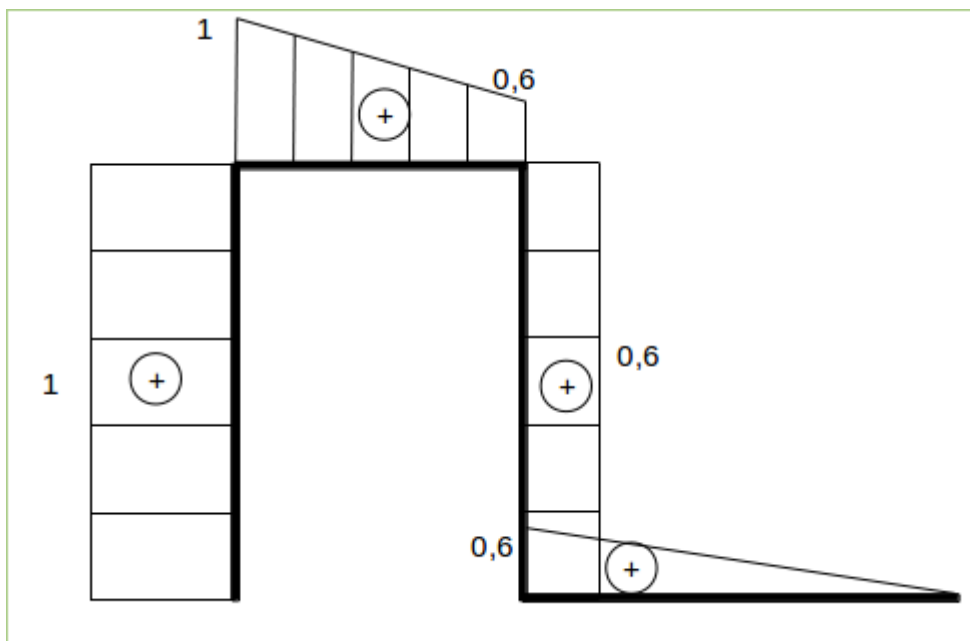
$$pr_y: -R_A + R_C = 0 \Rightarrow R_A = R_C = 0,2.$$

$$M_{01} = R_C x_1 = 0,2 x_1; M_{01}(0) = 0; M_{01}(l_3) = 0,6;$$

$$M_{02} = R_C l_3 = 0,6;$$

$$M_{03} = R_C(l_3 + x_3) = 0,2(3 + x_3) = 0,2 x_3 + 0,6; M_{03}(0) = 0,6; M_{03}(l_2) = 1;$$

$$M_{04} = R_C(l_2 + l_3) = 1.$$



Проверяем, равно ли нулю угловое перемещение:

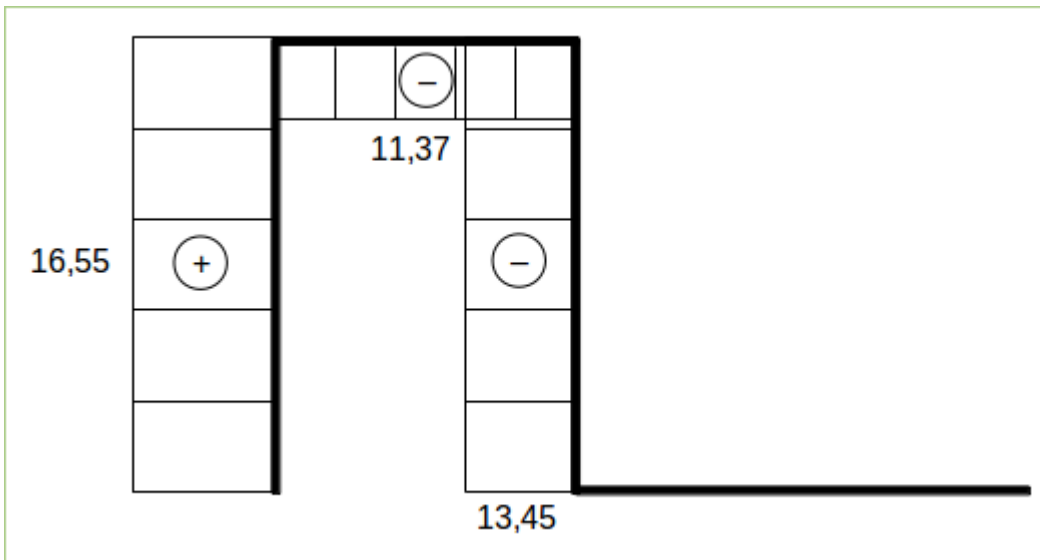
$$EJ_z \delta = \int_0^3 0,2 x \cdot 13,45 x dx - \int_0^3 0,6(40,35 - 20 x) dx + \int_0^2 (0,2 x + 0,6)(-7,5 x^2 + 13,45 x - 19,65) dx + \int_0^3 (11,37 x - 22,75) \cdot 1 dx = 24,21 + 18,63 - 26,13 - 17,09 = -0,38 \approx 0.$$

Погрешность, обусловленная приближенностью вычислений составляет:

$$\frac{0,38 \cdot 100}{\frac{42,84 + 43,22}{2}} \approx 0,88 \%$$

Строим эпюры нормальных сил:

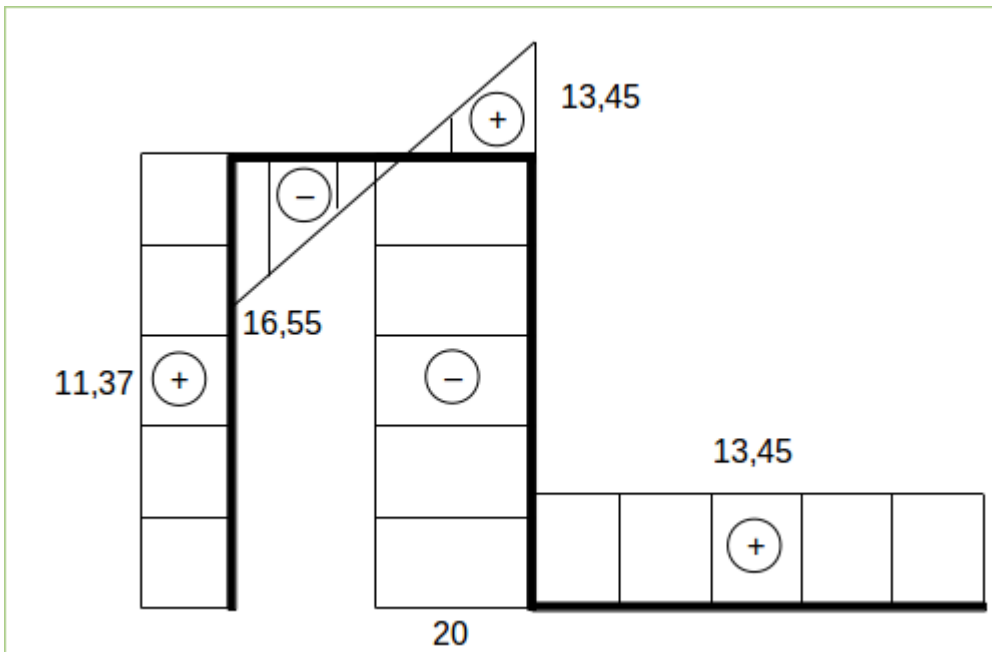
$$N_1 = 0; N_2 = -X_2 = -13,45; N_3 = X_1 - F = 8,63 - 20 = -11,37; N_4 = ql_2 - X_2 = 30 - 13,45 = 16,55.$$



Строим эпюры поперечных сил:

$$Q_1 = X_2 = 13,45; Q_2 = -F = -20; Q_3 = X_2 - qx_3 = 13,45 - 15x_3;$$

$$Q_3(0) = 13,45; Q_3(l_2) = -16,55; Q_3(x_3 \approx 0,9) = 0; Q_4 = F - X_1 = 20 - 8,63 = 11,37.$$



Подбираем поперечное сечение рамы:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{40,35 \text{ кН} \cdot \text{м}}{W_z} \leq 160 \text{ МПа} = 160000 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \Rightarrow W_z \geq 252 \text{ см}^3.$$

Допустим, швеллера имеют моменты сопротивления W каждый (схематически они расположены так:]]). Тогда:

$$W_z = 2W \geq 252 \Rightarrow W \geq 126.$$

Из таблицы находим, что нужно выбрать швеллеры профиля 18а.