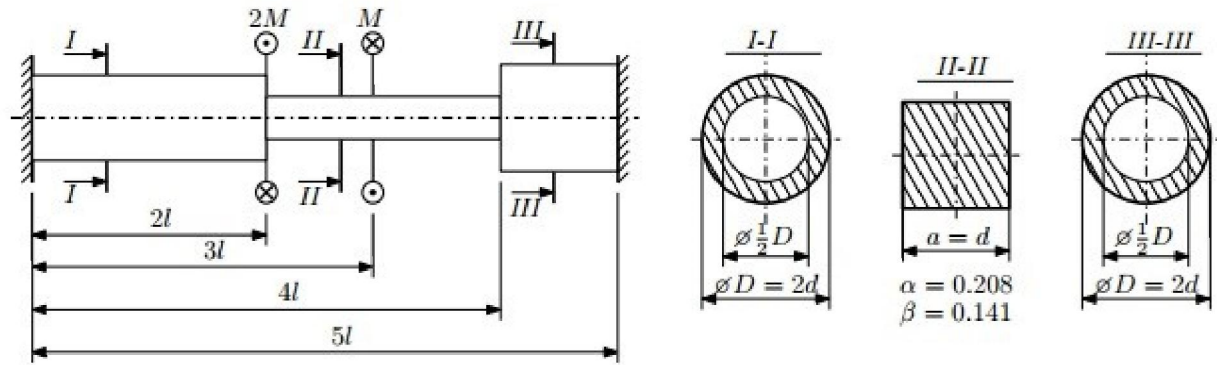


Задача 2



Участки вала соединяются абсолютно жёсткими фланцами, толщиной которых следует пренебречь. Для заданного вала:

1. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры моментов, напряжений и углов поворотов сечений;
2. Подсчитать работу внешних моментов и потенциальную энергию деформации;
3. Подобрать размеры поперечных сечений и вычислить максимальный угол поворота.

Параметры задачи: $M = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $l = 100 \text{ мм}$, $\tau_T = 200 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $n_T = 2$.

- 1) Параметры сечений (сечения III и I идентичны):

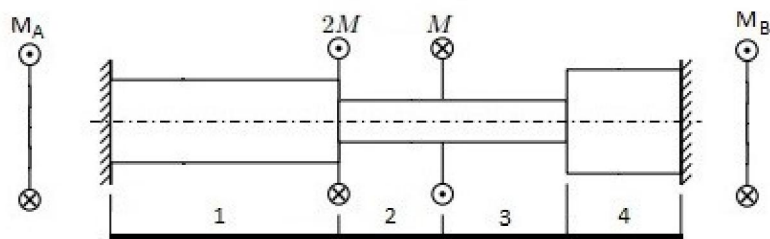
$$W_I = 0.2 D^3 \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0.2 (2d)^3 \left(1 - \left(\frac{d}{2d} \right)^4 \right) = 1.5 d^3 \quad W_{III} = W_I$$

$$J_I = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = \frac{\pi (2d)^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{2d} \right)^4 \right) = \frac{15 \cdot \pi \cdot d^4}{32} = 1.473 \cdot d^4 \quad J_{III} = J_I$$

$$W_{II} = \alpha \cdot d^3 = 0.208 \cdot d^3$$

$$J_{II} = \beta \cdot d^4 = 0.141 \cdot d^4$$

- 2) Для раскрытия стат.неопределённости разобьём вал на участки 1, 2, 3, 4 (а римскими цифрами I, II, III обозначены сечения) и обозначим моменты в заделках:



$$M_A + 2M - M + M_B = 0$$

Условие совместности деформаций:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 0$$

Моменты на участках определяем, отсекая левую сторону вала:

$$2 l \cdot \frac{(M_A)}{G \cdot J_I} + l \cdot \frac{(2 M + M_A)}{G \cdot J_{II}} + l \cdot \frac{(-M + 2 M + M_A)}{G \cdot J_{II}} + l \cdot \frac{(-M + 2 M + M_A)}{G \cdot J_I} = 0$$

$$M_A = -M \cdot \frac{J_{II} + 3 J_I}{3 \cdot J_{II} + 2 \cdot J_I} = -M \cdot \frac{0.141 + 3 \cdot 1.473}{3 \cdot 0.141 + 2 \cdot 1.473} = -1.354 M$$

$$M_B = -M_A - M = 0.354 M$$

Моменты на участках:

$$M_1 = M_A$$

$$M_1 := -1.354 M = -541.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 2 M + M_A$$

$$M_2 := 0.646 M = 258.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = -M + 2 M + M_A$$

$$M_3 := -0.354 M = -141.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_4 = -M + 2 M + M_A$$

$$M_4 := -0.354 M = -141.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3) Проверить необходимо участки 1 и 2 (т.к. на других участках нагрузки меньше):

$$\frac{\tau_T}{n_T} = \frac{M_1}{W_I} \quad \frac{\tau_T}{n_T} = \frac{1.354 M}{1.5 d^3}$$

$$d_I := \sqrt[3]{\frac{1.354 M}{1.5 \frac{\tau_T}{n_T}}} = 15.3 \text{ mm}$$

$$\frac{\tau_T}{n_T} = \frac{M_2}{W_{II}} \quad \frac{\tau_T}{n_T} = \frac{0.646 M}{0.208 \cdot d^3}$$

$$d_{II} := \sqrt[3]{\frac{0.646 M}{0.208 \cdot \frac{\tau_T}{n_T}}} = 23.2 \text{ mm}$$

Допустимые размеры (не менее):

$$d_{\partial on} := \max(d_I, d_{II}) = 23.2 \text{ mm}$$

$$D_{\partial on} := 2 \cdot d_{\partial on} = 46.3 \text{ mm}$$

$$W_I := 1.5 d_{\partial on}^3 = 18635 \text{ mm}^3$$

$$W_{II} := 0.208 d_{\partial on}^3 = 2584 \text{ mm}^3$$

$$J_I := 1.473 d_{\partial on}^4 = 423814 \text{ mm}^4$$

$$J_{II} := 0.141 d_{\partial on}^4 = 40569 \text{ mm}^4$$

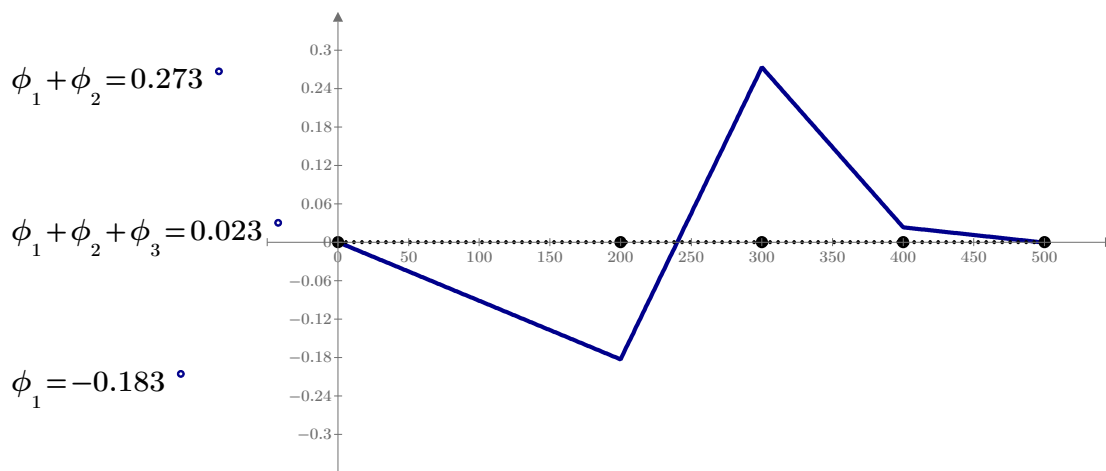
4) Углы поворота на участках при найденных только что размерах:

$$\phi_1 := 2 l \cdot \frac{M_1}{G \cdot J_I} = -0.183^\circ$$

$$\phi_2 := l \cdot \frac{M_2}{G \cdot J_{II}} = 0.456^\circ$$

$$\phi_3 := l \cdot \frac{M_3}{G \cdot J_{II}} = -0.250^\circ$$

$$\phi_4 := l \cdot \frac{M_4}{G \cdot J_I} = -0.024^\circ$$



Наибольший угол поворота = 0.273 градуса.

У нас получилось, что:

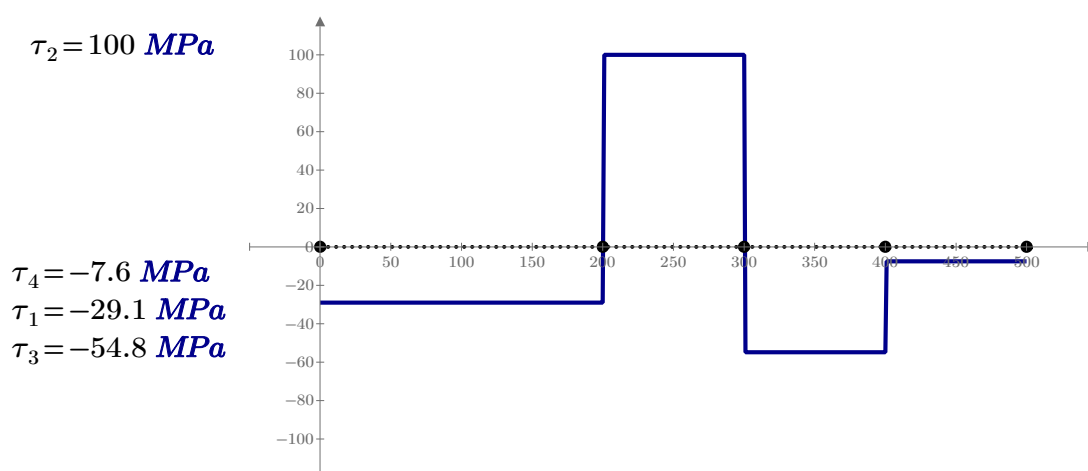
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0.023^\circ \quad \phi_4 := l \cdot \frac{M_4}{G \cdot J_I} = -0.024^\circ$$

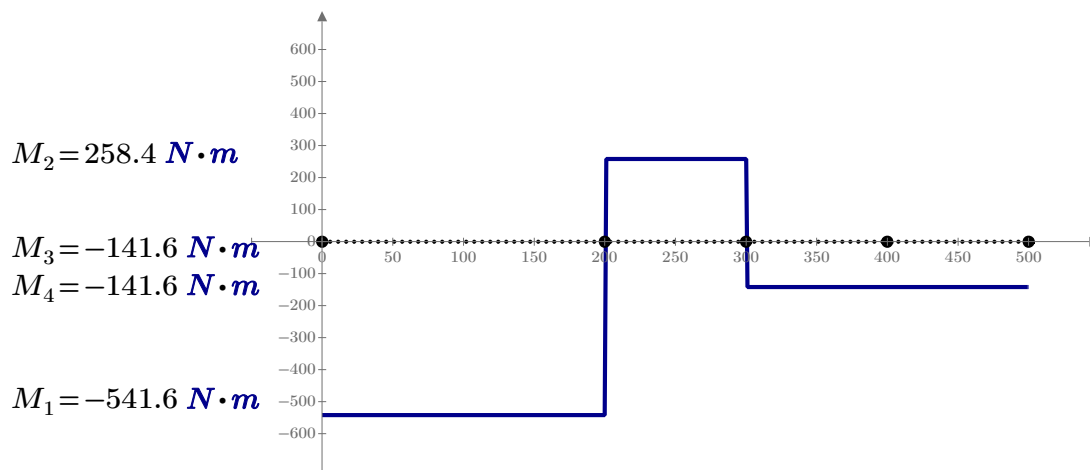
Т.е. результат в рамках погрешности вычислений в 0.001 градус.

5) Эпюры напряжений и моментов:

$$\tau_1 := \frac{M_1}{W_I} = -29.1 \text{ MPa} \quad \tau_2 := \frac{M_2}{W_{II}} = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 := \frac{M_3}{W_{II}} = -54.8 \text{ MPa} \quad \tau_4 := \frac{M_4}{W_I} = -7.6 \text{ MPa}$$





6) Работа внешних моментов равна накопившейся в бросе потенциальной энергии деформации кручения:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_k^2}{GJ_k} dx$$

$$\Pi := \frac{1}{2} \left(\frac{M_1^2}{G \cdot J_I} \cdot 2l + \frac{M_2^2}{G \cdot J_{II}} \cdot l + \frac{M_3^2}{G \cdot J_{II}} \cdot l + \frac{M_4^2}{G \cdot J_I} \cdot l \right) = 2.232 \text{ Дж}$$