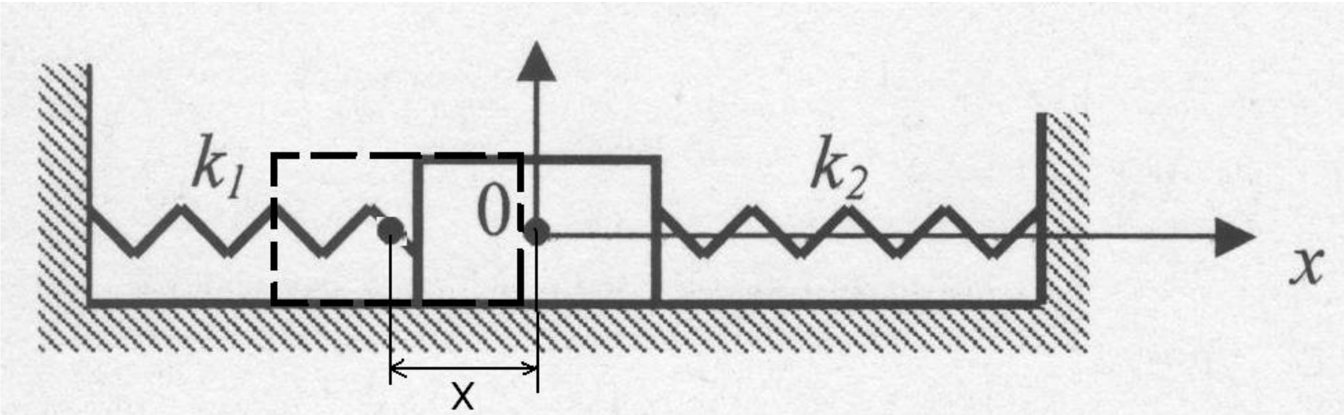
Задание 1



Дано:

m = 14,6 кг

k_1 = 400 Н/м

k_2 = 500 Н/м

x_0 = 1,2 см = 0,12 м

t = 1 с

Найти:

а) $x(t)$ - ?

A - ?

ω - ?

T - ?

ν - ?

φ_0 - ?

б) график

в) φ - ?

x - ?

υ - ?

a - ?

F - ?

$E_к$ - ?

$E_п$ - ?

Решение:

Пусть в произвольный момент времени тело смещено от положения равновесия на x (допустим влево) В этот момент на него действует сила:

$$F_x = T_{1x} + T_{2x} = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x \quad (1),$$

где T_{1x} и T_{2x} - проекции силы упругости, действующие на брусок со стороны пружин. Поскольку сила в любой момент времени линейно зависит от смещения, то колебания будут гармоническими. Зависимость смещения от времени при таких колебаниях зависит от времени согласно закону:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2),$$

где A – амплитуда колебаний, ω - круговая частота, φ_0 – начальная фаза колебаний.

По условию задачи груз сместили на x_0 от положения равновесия. Поскольку колебания происходят без притока энергии, максимальное смещение не будет меняться, т.е. $A = x_0$ = 1,2 см.

При гармонических колебаниях сила и смещение связаны соотношением:

$$F_x = -m\omega^2 x \quad (3)$$

$$-(k_1 + k_2)x = -m\omega^2 x$$

$$(k_1 + k_2) = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2 + k_1}{m}} = \sqrt{\frac{900}{14{,}6}} = 7{,}85 \text{ с}^{-1}$$

Период и круговая частота связаны соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}8 \text{ с}$$

Частота определятся так:

$$\nu = \frac{1}{T} = 1{,}25 \text{ Гц}$$

Начальную фазу можно определить из уравнения (2). Поскольку в начальный момент времени смещение равно $x = -A$ получим:

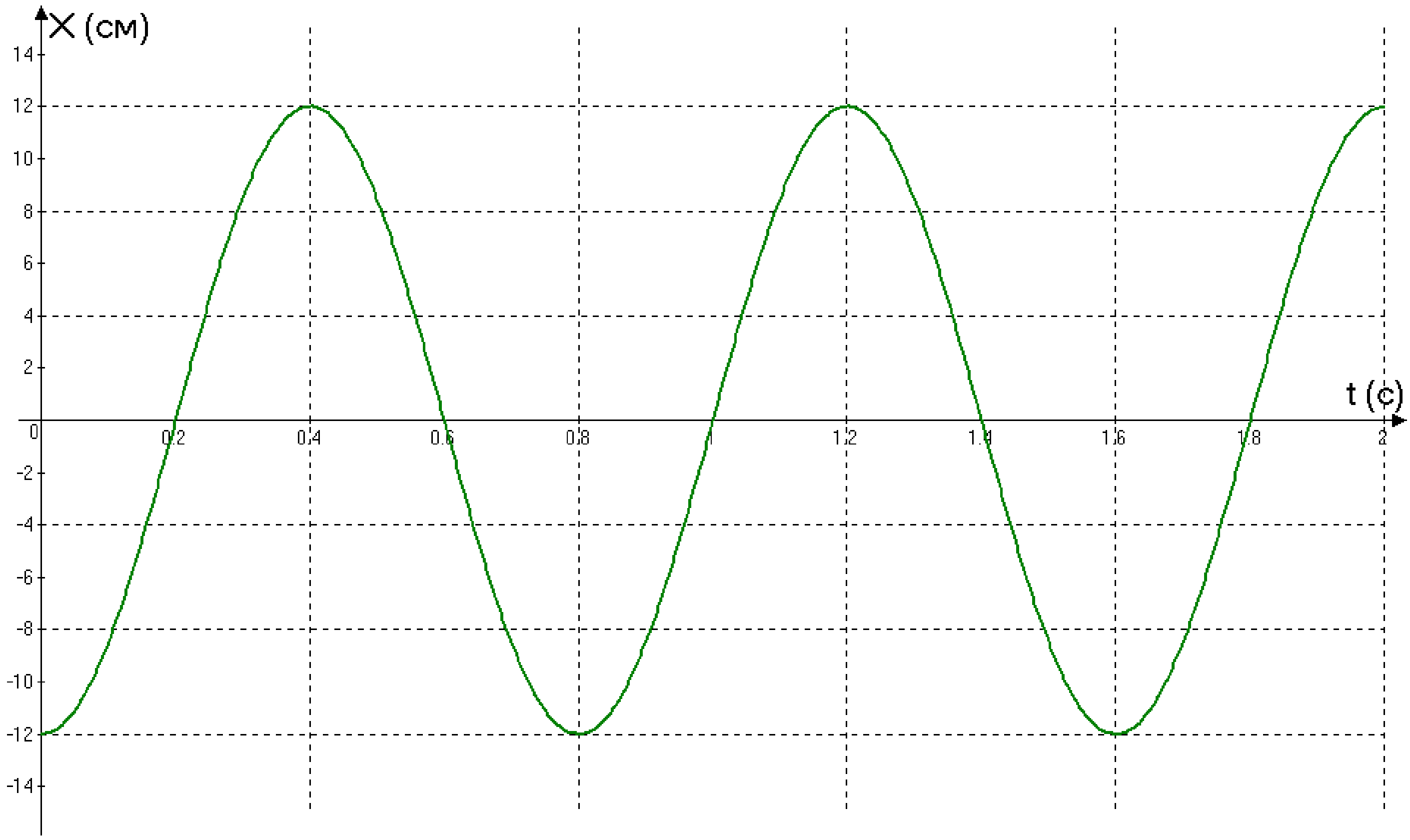
$$x(t = 0) = -A = A\sin(\omega\ 0 + \varphi_0)\ \Rightarrow$$

$$\sin(\varphi_0) = -1\ \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Таким образом уравнение $x\ (t)$ будет выглядеть так:

$$x(t) = 0{,}12\sin(7{,}85\ t - \frac{\pi}{2})\quad (4)$$



Теперь определим требуемые величины в момент времени t. Для определения x просто в уравнение (4) подставим это время:

$$x(t = 1) = 0{,}12\sin(7{,}85\ 1 - \frac{3{,}14}{2}) = 0 \text{ (это видно также из графика)}$$

Если продифференцировать уравнение (2) по времени, то мы получим зависимость проекции скорости от времени:

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\ \omega\cos(\omega\ t + \varphi_0)$$

$$\upsilon_x(t = 1) = 0{,}12 \cdot 7{,}85\cos(7{,}85\ 1 - \frac{3{,}14}{2}) = 0{,}942 \text{ м/с}$$

Это будет максимальная скорость тела, поскольку в данный момент времени оно будет находиться в положении равновесия.

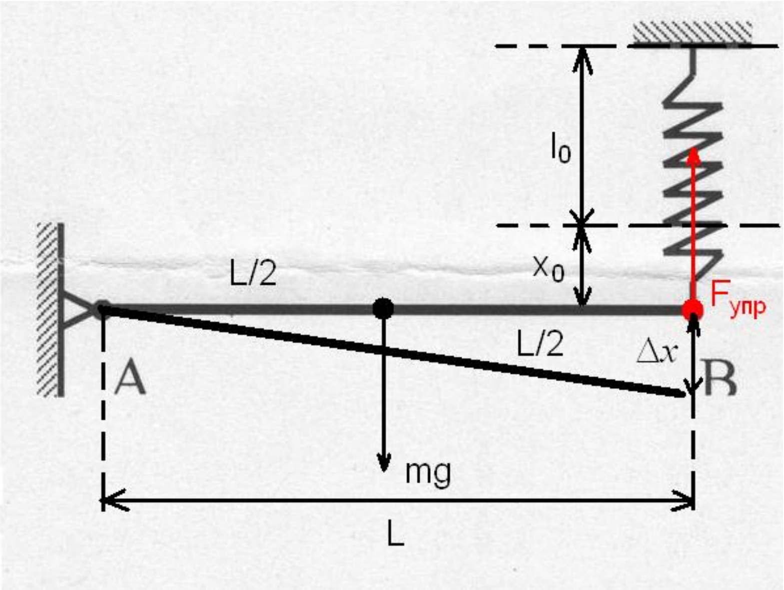
Поскольку в положении равновесия на тело не действует горизонтальная сила то $F = 0$, а согласно закону Ньютона и ускорение тоже будет нулевым $a = 0$. Так же не будет и потенциальной энергии деформации $E_п = 0$. Кинетическая энергия будет равна:

$$E_к = \frac{m\,\upsilon^2}{2} = \frac{14{,}6\ 0{,}942^2}{2} = 6{,}48 \text{ Дж}$$

Фаза колебаний определяется по формуле:

$$\varphi = \omega\, t + \varphi_0 = 7{,}85 \cdot 1 - \frac{3{,}14}{2} = 6{,}28 = \pi$$

Задание 2



Дано:

$m = 3{,}8$ кг

$k = 50$ Н/м

Найти:

T - ?

Решение:

Стержень вращается вокруг точки А, на него действуют два вращательных момента:

$$M_1 = m\,g\,\frac{L}{2}$$

$$M_2 = F_{упр}\,L\,,$$

где M_1 и M_2 – момент силы тяжести и силы упругости соответственно, L – длина стержня, $F_{упр}$ – сила упругости, действующая на стержень со стороны пружины.

Суммарный вращательный момент будет равен:

$$M = M_1 - M_2 = m\,g\,\frac{L}{2} - F_{упр}\,L \quad (1)$$

В положении равновесия моменты сил действующие на стержень скомпенсированы, значит:

$$M = 0 = m\,g\,\frac{L}{2} - F_{упр0}\,L \Rightarrow$$

$$\frac{m\,g}{2} = F_{упр0} = k\,x_0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{m\,g}{2} = k\,x_0 \ (2)$$

где x_0 – деформация пружины в положении равновесия.

Малые колебания можно считать гармоническими и $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где ω - круговая частота колебаний. Запишем закон Ньютона для вращательного движения:

$$M = J \cdot \beta \ (3),$$

где β - угловое ускорение стержня, J – момент инерции стержня. Угловое ускорение при гармонических колебаниях линейно зависит от угла поворота φ:

$$\beta = \omega^2 \varphi \Rightarrow M = \omega^2 J \varphi \ (4)$$

При малых колебаниях можно угол φ будет мал и можно считать что $\varphi \approx \frac{\Delta x}{L}$, где Δx –разность между начальной высотой точки В и смещенной по вертикали. Если за x обозначить деформацию пружины, то $\Delta x = x - x_0$. По закону Гука:

$$F_{упр} = k\,x = k\,(\Delta x + x_0) \ (5)$$

Из уравнений (1) и (5) находим:

$$M = m\,g\,\frac{L}{2} - F_{упр}\,L = L\left(\frac{m\,g}{2} - k\,(\Delta x + x_0)\right),$$ а если учесть еще и уравнение (2), то

$$M = L\,k\Delta x = L\,k\,\varphi\,L = k\,\varphi\,L^2 \ (6)$$

Из уравнений (4) и (6) получаем:

$$k\,\varphi\,L^2 = \omega^2 J\,\varphi \Rightarrow$$

$$k\ L^2 = \omega^2 J \Rightarrow$$

$$\omega = L\sqrt{\frac{k}{J}} \ (7)$$

Момент инерции однородного стержня при вращении относительно оси проходящей через один из его концов можно вычислить по формуле:

$$J = J_0 + m\,d^2,$$

где J_0 – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, d – расстояние от оси вращения до центра масс. Учитывая что в нашем случае $J_0 = \frac{1}{12}\,m\,L^2$, а $d = L/2$, получим:

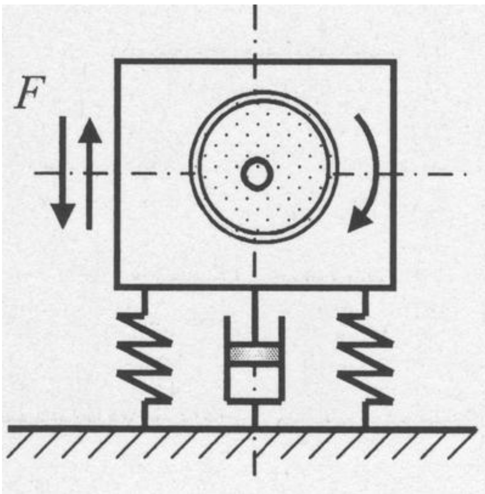
$$J = \frac{1}{3}\,m\,L^2$$

Подставляя это значение в формулу (7) получим:

$$\omega = L\sqrt{\frac{k}{J}} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 1\ \text{с}$$

Задание 3



Дано:

$m = 1000$ кг

$k = 3\cdot 10^6$ Н/м

$b = 2\cdot 10^4$ кг/с

$\nu = 30$ об/с

$F_0 = 1400$ Н

Найти:

а) ω_0 - ?

Ω - ?

A - ?

б) F_{01} - ?

α - ?

в) $\Omega_{рез}$ - ?

$\nu_{рез}$ - ?

Решение:

На тело действуют четыре силы:

сила тяжести $m\,g$

сила упругости со стороны пружины $F_{упр} = -k\,x$, где x – деформация пружины

сила сопротивления демпфера $F_с = -b\,\upsilon$, где υ - скорость механизма

сила внешняя $F = F_0 \sin(\Omega t)$

Поскольку в положении равновесия силы действующие на тело скомпенсированы, то можно не учитывать силу тяжести, считая ее скомпенсированной силой упругости, которая действует на тело в положении равновесия. Иными словами, колебания будут происходить относительно оси, в которой тело находится в покое, тогда под x в законе Гука следует понимать не деформацию пружины, а смещение от положения равновесия.

Когда на тело действуют указанные силы его движение будет происходить по закону:

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (1),$$

где ω - частота колебаний которая равна

$$\Omega = 2\,\pi\,\nu = 188{,}4 \text{ с}^{-1}$$

Амплитуда колебаний вычисляется по формуле:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\ \beta^2\Omega^2}} \quad (2),$$

где ω_0 – круговая частота собственных колебаний системы, β - коэффициент затухания равный

$$\beta = b/2m = 10 \text{ с}^{-1}$$

Колебания пружинного маятника происходят с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Собственная частота колебания ω_0 отсюда равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 54{,}8 \text{ с}^{-1}$$

Подставляя найденные значения в уравнение (2) получим:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\ \beta^2\Omega^2}} = \frac{1400}{1000\sqrt{(54{,}8^2 - 188{,}4^2)^2 + 4\ 10^2 188{,}4^2}} = 4{,}28 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0{,}043 \text{ мм}$$

Максимальная сила действующая на фундамент будет в тот момент, когда механизм находится в максимальном смещении, т.е. сила упругости, действующая на него равна:

$$F_{\text{упр}} = k\,A$$

Это и будет амплитуда усилия (т.е. сила, действующая на фундамент помимо веса механизма), т.е:

$$F_{01} = F_{\text{упр}} = k\,A = 129 \text{ Н}$$

Коэффициент амортизации:

$$\alpha = \frac{F_{01}}{F_0} = 0{,}092$$

Резонансная частота определяется по формуле:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\,\beta^2} = 52{,}9 \text{ с}^{-1}$$

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{\Omega_{\text{рез}}}{2\,\pi} = 8{,}42 \text{ об/с}$$