**1.Постановка задачи:**

Требуется определить показатели надежности элемента без восстановления и с восстановлением соответственно для двух вариантов исходных данных.

*Первый набор данных.* На испытания поставлено N=100 элементов. Моменты отказов элементов представлены в таблице 1. Все элементы работают до своего первого отказа и после отказа не ремонтируются. Требуется определить статистические и теоретические показатели надежности элемента: *T1, P(t), Q(t), f(t), λ(t)*.

Таблица 1. Моменты отказов элементов в часах

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 192 | 325 | 125 | 60 | 243 | 338 | 153 | 134 | 161 | 68 |
| 240 | 401 | 247 | 343 | 295 | 160 | 190 | 200 | 110 | 128 |
| 216 | 13 | 233 | 184 | 59 | 103 | 166 | 74 | 42 | 93 |
| 77 | 104 | 116 | 253 | 228 | 132 | 58 | 106 | 143 | 211 |
| 59 | 154 | 198 | 81 | 240 | 115 | 193 | 179 | 244 | 290 |
| 175 | 7 | 161 | 257 | 93 | 158 | 122 | 20 | 151 | 207 |
| 469 | 144 | 111 | 96 | 87 | 150 | 91 | 55 | 199 | 188 |
| 216 | 152 | 98 | 127 | 173 | 76 | 225 | 335 | 181 | 268 |
| 233 | 149 | 58 | 99 | 305 | 90 | 169 | 29 | 21 | 347 |
| 51 | 259 | 142 | 318 | 195 | 171 | 162 | 104 | 110 | 245 |

*Второй набор данных.* На испытаниях находится N=10 элементов. В течение периода *Т*=500 часов регистрируются моменты времени отказов элементов (таблица 2). Предполагается, что отказавшие элементы заменяют идентичными по надежности элементами. Требуется определить показатели надежности элемента, характеризующие время его работы между соседними отказами: *T, f(t), F(t), λ(t).* Обработка статистических данных предусматривает их группировку в 10 частичных интервалах 12

(классах). Уровень значимости принять равным 0,05.

Таблица 2. Моменты времени отказов элементов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № эл. | | Моменты времени отказов элементов на периоде 500 часов | | | | | | | | |
| 1 | 221 | 345 | 389 | 529 | 698 |  |  |  |  |  |
| 2 | 2 | 39 | 75 | 106 | 128 | 216 | 516 | 593 | 698 |  |
| 3 | 139 | 339 | 467 | 482 | 556 | 699 |  |  |  |  |
| 4 | 8 | 11 | 52 | 146 | 192 | 486 | 499 | 529 | 655 |  |
| 5 | 106 | 169 | 325 | 364 | 594 |  |  |  |  |  |
| 6 | 192 | 219 | 233 | 364 | 426 |  |  |  |  |  |
| 7 | 319 | 462 | 593 |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 85 | 346 | 569 | 579 | 611 | 625 | 663 |  |  |  |
| 9 | 82 | 111 | 131 | 162 | 379 | 391 | 462 | 554 |  |  |
| 10 | 225 | 446 | 626 | 648 | 669 |  |  |  |  |  |

**2.Рассмотрим первый набор данных**.

Обозначим N1=100. Представим все данные в виде вектора-столбца.



Вычисления произведены в программе MATCAD 14.

Используя функции ***stack*** и ***sort***

получаем вектор - столбец A1 и сортируем его в порядке возрастания, получим

Вектор столбец A1r. Используя функции программы получаем минимальное и максимальное значения упорядоченного вектор-столбца A1r minA1 и maxA1,

А также проверяем количество элементов выборки n1=100.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | **Элемент** |  |  |  |  |  |  |
| *1* | **7** |  | *36* | **122** |  | *71* | **200** |
| *2* | **13** |  | *37* | **125** |  | *72* | **207** |
| *3* | **20** |  | *38* | **127** |  | *73* | **211** |
| *4* | **21** |  | *39* | **128** |  | *74* | **216** |
| *5* | **29** |  | *40* | **132** |  | *75* | **216** |
| *6* | **42** |  | *41* | **134** |  | *76* | **225** |
| *7* | **51** |  | *42* | **142** |  | *77* | **228** |
| *8* | **55** |  | *43* | **143** |  | *78* | **233** |
| *9* | **58** |  | *44* | **144** |  | *79* | **233** |
| *10* | **58** |  | *45* | **149** |  | *80* | **240** |
| *11* | **59** |  | *46* | **150** |  | *81* | **240** |
| *12* | **59** |  | *47* | **151** |  | *82* | **243** |
| *13* | **60** |  | *48* | **152** |  | *83* | **244** |
| *14* | **68** |  | *49* | **153** |  | *84* | **245** |
| *15* | **74** |  | *50* | **154** |  | *85* | **247** |
| *16* | **76** |  | *51* | **158** |  | *86* | **253** |
| *17* | **77** |  | *52* | **160** |  | *87* | **257** |
| *18* | **81** |  | *53* | **161** |  | *88* | **259** |
| *19* | **87** |  | *54* | **161** |  | *89* | **268** |
| *20* | **90** |  | *55* | **162** |  | *90* | **290** |
| *21* | **91** |  | *56* | **166** |  | *91* | **295** |
| *22* | **93** |  | *57* | **169** |  | *92* | **305** |
| *23* | **93** |  | *58* | **171** |  | *93* | **318** |
| *24* | **96** |  | *59* | **173** |  | *94* | **325** |
| *25* | **98** |  | *60* | **175** |  | *95* | **335** |
| *26* | **99** |  | *61* | **179** |  | *96* | **338** |
| *27* | **103** |  | *62* | **181** |  | *97* | **343** |
| *28* | **104** |  | *63* | **184** |  | *98* | **347** |
| *29* | **104** |  | *64* | **188** |  | *99* | **401** |
| *30* | **106** |  | *65* | **190** |  | *100* | **469** |
| *31* | **110** |  | *66* | **192** |  |  |  |
| *32* | **110** |  | *67* | **193** |  |  |  |
| *33* | **111** |  | *68* | **195** |  |  |  |
| *34* | **115** |  | *69* | **198** |  |  |  |
| *35* | **116** |  | *70* | **199** |  |  |  |











































































3.Вычисления произведены в системе MATCAD 14.

Рис.1 –гистограмма распределения времени до отказа (первый набор данных).

Здесь µ1=- среднее арифметическое выборки ( математическое ожидание выборки).

d1=- выборочная дисперсия ( n1 -1-чтобы получить несмещенную оценку.

-выборочное среднеквадратичное отклонение.

Сумма элементов вектора P=100, т.е -проверка, что все элементы выборки учтены.

f=f(t)=- эмпирическая плотность распределения, показанная

на рис 2.



4.Чтобы проверить 4-е распределения,(нормальное,Гамма,Релея и экспоненциального распределения) необходимо произвести точечное оценивание параметров распределения по статистическим параметрам.

В нашем случае статистическими параметрами являются математическое ожидание и выборочное СКО-(выборочная дисперсия в d1).

Существуют различные методы для точечной оценки параметров распределения:

Метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод квантилей.

Можно использовать и метод НМК (наименьших квадратов).

Мы не будем приводить выводы (они достаточно полно описаны в литературе), а приведем формулы для точечной оценки параметров теоретических распределений, интересующих нас, полученные с использованием вышеуказанных методов.

Итак, для нормального распределения: f(t)-плотность распределения.

f(t)=

Для экспоненциального распределения:

f(t)=λ

**λ=**(один параметр- используем один момент - математическое ожидание , впрочем ).

Для Гамма распределение:

f(t)=

Г()- гамма-функция.

**=**

Для распределения Релея:

Распределение Релея является частным случаем распределения Вейбулла (так же как и экспоненциальное распределение).

Распределение Вейбулла –двухпараметрическое:

f(t)=, при =λ получим распределение Релея:

f(t)=2λt.

Покажем, как применяя метод моментов найти точечную оценку параметров распределения. В основе метода моментов лежит следующее: что точечная оценка параметров распределения приравнивается к моментам распределения, полученным по результатам статистически исследований, т.е.-mt=

и dt=d1(=), (1)

где mt-математическое ожидание теоретическое,

dt и -теоретические дисперсия и СКО соответственно.

Для распределения Вейбулла известны соотношения:

mt=, dt=, где gi=Г(1+, Г-гамма функция. (2)

Приравняв (1)и (2) получим систему из 2-х уравнений:

*,* где g1 и g2-функции и -наши выборочные моменты.

Т.е. система из2-ч уравнений с 2-мя неизвестными и .

Решая ее мы находим mt  и dt  .

В нашем случае =2.

) = 0,8862.

=Г(1+)=1.

,

***=*** - формула для оценки λ распределения Релея.

Заметим, что указанная в методических указаниях для распределения Релея

оценка λ через (m): m= , λ= совпадает со значением

***= =.***

Итак, нами получены выражения для точечной оценки 4-х параметров распределения.

Произведем их вычисление и построение графиков теоретических плотностей распределения в программе MATCAD 14.













































Рис.2-эмпирическая и теоретические плотности распределения.

5.Как видим наиболее подходящие теоретические распределения-это распределение Релея и также Гамма-распределение(fr(t)-красный цвет и fg(t)-розовый цвет).

Причем распределение Релея ближе к нашему эмпирическому.

Эту гипотезу и проверим.

Для проверки воспользуемся χ2-Критерием.

Таблица для распределения Релея:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |
| интервала | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| max i | 53,2 | 99,4 | 145,6 | 191,8 | 238 | 284,2 |
| min i | 7 | 53,2 | 99,4 | 145,6 | 191,8 | 238 |
| Ni | 7 | 19 | 18 | 21 | 14 | 10 |
| F(ti)max | 0,078277 | 0,247651 | 0,456943 | 0,653361 | 0,804334 | 0,90233 |
| F(ti)min | 0,00141 | 0,078277 | 0,247651 | 0,456943 | 0,653361 | 0,804334 |
| DFi | 0,076867 | 0,169373 | 0,209293 | 0,196418 | 0,150973 | 0,097996 |
| Nti | 7,686714 | 16,93732 | 20,92928 | 19,64181 | 15,09728 | 9,799626 |
| hi^2 | 0,06135 | 0,2512 | 0,409984 | 0,093916 | 0,079751 | 0,004097 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 7 | 8 | 9 | 10 |
| 330,4 | 376,6 | 422,8 | 469 |
| 284,2 | 330,4 | 376,6 | 422,8 |
| 5 | 4 | 1 | 1 |
| 0,95689 | 0,98317 | 0,99419 | 0,99823 |
| 0,90233 | 0,95689 | 0,98317 | 0,99419 |
| 0,05456 | 0,02628 | 0,01102 | 0,00404 |
| 5,45564 | 2,62838 | 1,10199 | 0,4036 |
| 0,03805 | 0,71578 | 0,00944 | 0,8813 |

Разбивка произведена на 10 интервалов (по условию задачи).

Здесь:

max i - максимальное значение(правая граница) i-го интервала.

min i – минимальное значение(левая граница0 i-го интервала.

Ni – эмпирическая частота попадания значений выборки в i-й интервал,

(значения из вектора P).

F(ti)max-значение теоретической функции распределения случайной величины от элемента t=max i.

Для распределения Релея: F(t)=.

F(ti)min – соответственно F(t), t=min i.

DFi – теоретическое значение вероятности попадания случайной величины в i-й интервал,

DFi=F(ti)max-F(ti)min.

Nti – теоретическая частота попадания случайной величины в i – й интервал:

Nti=DFiN, N=100 – количество элементов выборки.

hi^2i – взвешенный квадрат отклонения hi^2=

Далее производим суммирование и получаем:

Hi2 == 2,544866.

Число степеней свободы к=10-1-1. Поскольку отклонения связаны линейным соотношением =0 и оценивался 1 параметр λ=2,88

(λ=λ1- при оценке распределения Релея), то получаем минус 1 и 1 степень свободы.

Критическое значение Hi2кр(k;z), k=8,z=0,05- заданный уровень значимости

Находится из статистических таблиц для критерия χ2.

Hi2кр(8;0,05)=15,507.

Поскольку Hi2  < Hi2кр, то гипотеза о распределении Релея генеральной совокупности не противоречит экспериментальным данным.

Чтобы выбрать какое-то одно распределение оценим также предположение о Гамма-распределении случайной величины.

Аналогично составим, таблицу, только

F(t)=. dt- неполная Гамма-функция.

Hi2кр(7;0,05)=14,067.

Таблица для Гамма-распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |
| интервала | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| max i | 53,2 | 99,4 | 145,6 | 191,8 | 238 | 284,2 |
| min i | 7 | 53,2 | 99,4 | 145,6 | 191,8 | 238 |
| Ni | 7 | 19 | 18 | 21 | 14 | 10 |
| F(ti)max | 0,060739 | 0,252642 | 0,483876 | 0,677926 | 0,813139 | 0,897288 |
| F(ti)min | 0,000138 | 0,060739 | 0,252642 | 0,483876 | 0,677926 | 0,813139 |
| DF | 0,060601 | 0,191902 | 0,231234 | 0,19405 | 0,135213 | 0,084149 |
| Nt | 6,060126 | 19,19021 | 23,12344 | 19,40499 | 13,52133 | 8,414855 |
| hi^2 | 0,145766 | 0,001885 | 1,135197 | 0,131103 | 0,016945 | 0,298601 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 7 | 8 | 9 | 10 |
| 330,4 | 376,6 | 422,8 | 469 |
| 284,2 | 330,4 | 376,6 | 422,8 |
| 5 | 4 | 1 | 1 |
| 0,945829 | 0,972344 | 0,986246 | 0,993306 |
| 0,897288 | 0,945829 | 0,972344 | 0,986246 |
| 0,048541 | 0,026516 | 0,013902 | 0,00706 |
| 4,854079 | 2,651563 | 1,390225 | 0,705956 |
| 0,004387 | 0,68574 | 0,109533 | 0,122474 |

Расчеты произведены в программе Excel с использованием встроенных функций.

Hi2 == 2,651633 Hi2кр(7;0,05)=14,067

Поскольку Hi2  < Hi2кр(7;0,05) то и гипотеза о Гамма распределении подходит.

Но поскольку Hi2(Релея)< Hi2(Гамма).

Окончательно выбираем распределение Релея.

6.Строим графики: Pr(t)-вероятность безотказной работы;

Qr(t)- вероятность отказа;

fr(t)-плотность распределения(вероятности отказа);

λr(t)-интенсивность отказа.

































7.Как видим интенсивность отказа λr(t) линейно зависимости от времени.

Итак. для 1-го набора данных невосстанавливаемых элементов получены вышеуказанные

параметры.

Распределение времени до отказа подчинено законам распределения Релея.

**2.Второй набор данных.**

.Для расчета будем использовать время между отказами элементов на интервале 500 часов. После преобразования данных из Таблицы2 получаем Таблицу3:

Таблица 3: Моменты времени отказов элементов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № эл. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 221 | 124 | 44 | 140 | 169 |  |  |  |  |
| 2 | 2 | 37 | 36 | 31 | 22 | 88 | 300 | 77 | 105 |
| 3 | 139 | 200 | 128 | 15 | 74 | 143 |  |  |  |
| 4 | 8 | 3 | 41 | 94 | 46 | 294 | 13 | 30 | 126 |
| 5 | 106 | 63 | 156 | 39 | 230 |  |  |  |  |
| 6 | 192 | 27 | 14 | 131 | 62 |  |  |  |  |
| 7 | 319 | 143 | 131 |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 85 | 261 | 223 | 10 | 32 | 14 | 38 |  |  |
| 9 | 82 | 29 | 20 | 31 | 217 | 12 | 71 | 92 |  |
| 10 | 225 | 221 | 180 | 22 | 21 |  |  |  |  |

Сортируем данные и записываем в виде вектор –столбца B1r:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Элемент |  | № | Элемент |  | № | Элемент |
| 1 | **2** |  | 21 | **37** |  | 42 | **131** |
| 2 | **3** |  | 22 | **38** |  | 43 | **131** |
| 3 | **8** |  | 23 | **39** |  | 44 | **139** |
| 4 | **10** |  | 24 | **41** |  | 45 | **140** |
| 5 | **12** |  | 25 | **44** |  | 46 | **143** |
| 6 | **13** |  | 26 | **46** |  | 47 | **143** |
| 7 | **14** |  | 27 | **62** |  | 48 | **156** |
| 8 | **14** |  | 28 | **63** |  | 49 | **169** |
| 9 | **15** |  | 29 | **71** |  | 50 | **180** |
| 10 | **20** |  | 30 | **74** |  | 51 | **192** |
| 11 | **21** |  | 31 | **77** |  | 52 | **200** |
| 12 | **22** |  | 32 | **82** |  | 53 | **217** |
| 13 | **22** |  | 33 | **85** |  | 54 | **221** |
| 14 | **27** |  | 34 | **88** |  | 55 | **221** |
| 15 | **29** |  | 35 | **92** |  | 56 | **223** |
| 16 | **30** |  | 36 | **94** |  | 57 | **225** |
| 17 | **31** |  | 37 | **105** |  | 58 | **230** |
| 18 | **31** |  | 38 | **106** |  | 59 | **261** |
| 19 | **32** |  | 39 | **124** |  | 60 | **294** |
| 20 | **36** |  | 40 | **126** |  | 61 | **300** |
|  |  |  | 41 | **128** |  | 62 | **319** |































maxB1 = 319









































Рис .1-гистограмма распределения времени на отказ



3.Вычисления произведены в системе MATCAD 14.

Рис.1 –гистограмма распределения времени до отказа(первый набор данных).

Здесь µ2=- среднее арифметическое выборки( математическое ожидание выборки).

D2=- выборочная дисперсия( n2-1-чтобы получить несмещенную оценку.

-выборочное среднеквадратичное отклонение.

Сумма элементов вектора nP2=62, т. е-проверка, что все элементы выборки учтены.

f2=f2(t)=- эмпирическая плотность распределения. Показана на рис.2(далее).

4.В соответствии с п.4 (для первого набора данных) также определяем точечные оценки параметров 4- распределений.

По аналогии:

Для нормального распределения: f(t)-плотность распределения.

f(t)=

Для экспоненциального распределения:

f(t)=λ

**λ=**(один параметр- используем один момент - математическое ожидание , впрочем ).

Для Гамма распределения:

f(t)=

Г()- гамма-функция.

**=**

Для распределения Релея:

- формула для оценки λ распределения Релея.

)=0,8862.

Произведем их вычисление и построение графиков теоретических плотностей распределений в программе MATCAD 14.































































Рис.2- Эмпирические и теоретические плотности распределения:

f2- эмпирическая, fn2-нормальное, fe2- экспоненциальное, fg2 – Гамма,

fr2 – Релея распределения.

Из рис.2 видим, что нам подходит экспоненциальное распределение.

Соответственно- принимаем гипотезу о экспоненциальном распределении.

Проверим ее с помощью уже известного нам χ2 –критерия Пирсона.

5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |
| интервала | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| max i | 33,7 | 65,4 | 97,1 | 128,8 | 160,5 | 192,2 |
| min i | 2 | 33,7 | 65,4 | 97,1 | 128,8 | 160,5 |
| Ni | 19 | 9 | 8 | 5 | 7 | 3 |
| F(ti)max | 0,284212 | 0,477379 | 0,618417 | 0,721393 | 0,79658 | 0,851476 |
| F(ti)min | 0,019648 | 0,284212 | 0,477379 | 0,618417 | 0,721393 | 0,79658 |
| DF | 0,264564 | 0,193167 | 0,141038 | 0,102976 | 0,075187 | 0,054896 |
| Nt | 16,40295 | 11,97635 | 8,744338 | 6,384537 | 4,661567 | 3,403568 |
| hi^2 | 0,411186 | 0,739679 | 0,06336 | 0,300248 | 1,173054 | 0,047852 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 7 | 8 | 9 | 10 |
| 223,9 | 255,6 | 287,3 | 319 |
| 192,2 | 223,9 | 255,6 | 287,3 |
| 5 | 2 | 1 | 3 |
| 0,891558 | 0,920823 | 0,94219 | 0,957791 |
| 0,851476 | 0,891558 | 0,920823 | 0,94219 |
| 0,040082 | 0,029265 | 0,021367 | 0,015601 |
| 2,48506 | 1,814426 | 1,324774 | 0,967262 |
| 2,545179 | 0,01898 | 0,07962 | 4,271873 |

Hi2 == 9968,164 Hi2кр(8;0,05)=15,507.

Поскольку Hi2  < Hi2кр, то гипотеза о экспоненциальном распределении генеральной совокупности не противоречит экспериментальным данным.

6. Строим графики: Pe(t)-вероятность безотказной работы;

Qe(t)- вероятность отказа;

fe(t)-плотность распределения(вероятности отказа);

λe(t)-интенсивность отказа.





















7. Таким образом для второго набора данных имеет место экспоненциальное распределение и соответственно - интенсивность отказов λ(t) постоянна,что видно из представленных графиков.

Это и не удивительно для восстанавливаемых элементов.