Задание №1

**Исходные данные**

Задана схема электрической цепи постоянного тока блока нагрузки выпрямителя радиотехнического устройства (Рис. 1).



Рис. 1. Исходная схема

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *E1*, В | *E2*, В | *E3*, В | *R1*, Ом | *R2*, Ом | *R3*, Ом | *R4*, Ом | *R5*, Ом | *R6*, Ом |
| 40 | 80 | 40 | 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 |

Провести расчет по методу непосредственного применения законов Кирхгофа, методом контурных токов и методом узловых напряжений; проверить результаты расчета цепи путем составления баланса мощностей; определить показания электроизмерительных приборов.

Решение

**Законы Кирхгофа**

Для расчета схемы по законам Кирхгофа нужно определить количество ветвей *NВ* и количество узлов *NУ* в схеме. Для наглядности перерисуем исходную схему, убрав вольтметр и амперметр.



Рис.2. Исходная схема без вольтметра и амперметра

Исходя из заданной схемы имеем: *NВ* = 5 и *NУ* = 3.

Таким образом, для решения схемы нужно составить *NВ*−*NУ*+1 = 5−3+1 = 3 уравнения по 2-му закону Кирхгофа и *NУ*−1 = 3−1 = 2 уравнения по 1-му закону.

Произвольно выберем положительные направления токов в ветвях (Рис. 3). Направление обхода контуров выбираем против часовой стрелки.



Рис. 3. Исходная схема с выбранными направлениями токов

Составим необходимое количество уравнений по 1-му и 2-му законам Кирхгофа.

$I\_{1}\left(R\_{1}+R\_{2}\right)+I\_{2}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)=E\_{1}+E\_{2}$;

$-I\_{2}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)-I\_{3}R\_{5}=-E\_{2}-E\_{3}$;

$I\_{3}R\_{5}-I\_{4}R\_{6}=0$;

$I\_{1}+I\_{5}=I\_{2}$;

$I\_{3}+I\_{4}=I\_{5}$.

Решим полученную систему уравнений относительно токов.

Подставим выражение тока *I*5 в четвертое уравнение, а также умножим на −1 второе уравнение, получим:

$I\_{1}\left(R\_{1}+R\_{2}\right)+I\_{2}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)=E\_{1}+E\_{2}$;

$I\_{2}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)+I\_{3}R\_{5}=E\_{2}+E\_{3}$;

$I\_{3}R\_{5}-I\_{4}R\_{6}=0$;

$I\_{1}+I\_{3}+I\_{4}=I\_{2}$.

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$I\_{1}\left(R\_{1}+R\_{2}\right)-I\_{3}R\_{5}=E\_{1}-E\_{3}$;

$I\_{2}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)+I\_{3}R\_{5}=E\_{2}+E\_{3}$;

$I\_{3}R\_{5}-I\_{4}R\_{6}=0$;

$I\_{1}+I\_{3}+I\_{4}=I\_{2}$.

Выразим токи в первом, втором и третьем уравнениях через ток *I*3, получим:

$I\_{1}=\frac{E\_{1}-E\_{3}+I\_{3}R\_{5}}{R\_{1}+R\_{2}}$;

$I\_{2}=\frac{E\_{2}+E\_{3}-I\_{3}R\_{5}}{R\_{3}+R\_{4}}$;

$I\_{4}=I\_{3}\frac{R\_{5}}{R\_{6}}$;

$I\_{1}+I\_{3}+I\_{4}=I\_{2}$.

Подставим правые части первого, второго и третьего уравнения в четвертое, в результате получим уравнение с одним неизвестным *I*3:

$\frac{E\_{1}-E\_{3}+I\_{3}R\_{5}}{R\_{1}+R\_{2}}+I\_{3}+I\_{3}\frac{R\_{5}}{R\_{6}}=\frac{E\_{2}+E\_{3}-I\_{3}R\_{5}}{R\_{3}+R\_{4}}$.

Решим данное уравнение

$\frac{E\_{1}-E\_{3}}{R\_{1}+R\_{2}}+I\_{3}\frac{R\_{5}}{R\_{1}+R\_{2}}+I\_{3}+I\_{3}\frac{R\_{5}}{R\_{6}}=\frac{E\_{2}+E\_{3}}{R\_{3}+R\_{4}}-I\_{3}\frac{R\_{5}}{R\_{3}+R\_{4}}$

$I\_{3}\left(\frac{R\_{5}}{R\_{1}+R\_{2}}+1+\frac{R\_{5}}{R\_{6}}+\frac{R\_{5}}{R\_{3}+R\_{4}}\right)=\frac{E\_{2}+E\_{3}}{R\_{3}+R\_{4}}-\frac{E\_{1}-E\_{3}}{R\_{1}+R\_{2}}$

Подставим исходные данные в полученное выражение:

$I\_{3}\left(\frac{4}{1+1}+1+\frac{4}{4}+\frac{4}{3+2}\right)=\frac{80+40}{3+2}-\frac{40-40}{1+1}$

$I\_{3}\left(2+1+1+0,8\right)=24-0$

$I\_{3}=\frac{24}{4,8}=5$ А.

Зная величину *I*3 определим остальные токи

$I\_{4}=I\_{3}\frac{R\_{5}}{R\_{6}}=5\frac{4}{4}=5$ А.

$I\_{5}=I\_{3}+I\_{4}=5+5=10$ А.

$I\_{1}=\frac{E\_{1}-E\_{3}+I\_{3}R\_{5}}{R\_{1}+R\_{2}}=\frac{40-40+5∙4}{1+1}=10$ А.

$I\_{2}=\frac{E\_{2}+E\_{3}-I\_{3}R\_{5}}{R\_{3}+R\_{4}}=\frac{80+40-5∙4}{3+2}=20$ А.

Так как найденные величины токов – положительные числа, следовательно, выбранные направления токов являются действительными направлениями токов в схеме.

Так как амперметр установлен в ветви, где протекает ток *I*4, следовательно, показания амперметра равны величине данного тока, т.е. 5 А.

Для определения показания вольтметра составляется уравнение, согласно 2-му закону Кирхгофа, т.е.

$I\_{1}R\_{1}+I\_{1}R\_{2}+V=E\_{1}$,

где *V* – показания вольтметра.

Таким образом, получаем:

$V=E\_{1}-I\_{1}R\_{1}+I\_{1}R\_{2}=40-10∙1+10∙1=20$ В.

Для проверки правильности решения составим баланс мощностей

Сумма мощностей потребляемых приемниками, должна быть равна сумме мощностей отдаваемых источниками, т.е. $\sum\_{}^{}E∙I=\sum\_{}^{}I^{2}∙R$.

Для нашей схемы баланс мощностей выглядит следующим образом:

$$E\_{1}∙I\_{1}+E\_{2}∙I\_{2}+E\_{3}∙I\_{5}=I\_{1}^{2}∙\left(R\_{1}+R\_{2}\right)+I\_{2}^{2}∙\left(R\_{3}+R\_{4}\right)+I\_{3}^{2}∙R\_{5}+I\_{4}^{2}∙R\_{6}$$

Подставим значения в полученное выражение, получим:

$$40∙10+80∙20+40∙10=10^{2}∙\left(1+1\right)+20^{2}∙\left(3+2\right)+5^{2}∙4+5^{2}∙4$$

$$400+1600+400=100∙2+400∙5+25∙4+25∙4$$

$$2400=200+2000+100+100$$

$$2400=2400$$

Т.к. баланс мощностей сошелся, следовательно, расчет схемы выполнен правильно.

**Метод контурных токов**

Контурный ток – это величина, которая одинакова во всех ветвях данного контура.

Действительный ток в определенной ветви определяется алгебраической суммой контурных токов, в которую эта ветвь входит. Нахождение действительных токов и есть первоочередная задача метода контурных токов.

Контурная ЭДС – это сумма всех ЭДС входящих в этот контур.

Собственным сопротивлением контура называется сумма сопротивлений всех ветвей, которые в него входят.

Общим сопротивлением контура называется сопротивление ветви, смежное двум контурам.

Для решения схемы методом контурных токов нужно составить *NВ*−*NУ*+1 = 5−3+1 = 3 уравнения по 2-му закону Кирхгофа. Следовательно, нам необходимо составить эти уравнения для 3-х контуров.

Направления токов в ветвях выберем аналогично Рис. 3. Выберем три контура, и укажем направление контурных токов *I*11, *I*22, *I*33. Выберем направление по часовой стрелке (Рис. 4).



Рис. 4. Исходная схема с выбранными направлениями контурных токов

Теперь составим систему уравнений:

$I\_{11}\left(R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}+R\_{4}\right)-I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)=-E\_{1}-E\_{2}$;

$I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}+R\_{5}\right)-I\_{11}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)-I\_{33}R\_{5}=E\_{2}+E\_{3}$;

$I\_{33}\left(R\_{5}+R\_{6}\right)-I\_{22}R\_{5}=0$.

Решим полученную систему уравнений относительно токов.

Выразим токи *I*11, *I*33 в первом и третьем уравнениях через ток *I*22:

$I\_{11}=\frac{I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)-E\_{1}-E\_{2}}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}+R\_{4}}$;

$I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}+R\_{5}\right)-I\_{11}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)-I\_{33}R\_{5}=E\_{2}+E\_{3}$;

$I\_{33}=\frac{I\_{22}R\_{5}}{R\_{5}+R\_{6}}$.

Подставим правые части первого и третьего уравнения во второе, в результате получим уравнение с одним неизвестным *I*22:

$I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}+R\_{5}\right)-\frac{\left[I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)-E\_{1}-E\_{2}\right]\left(R\_{3}+R\_{4}\right)}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}+R\_{4}}-\frac{I\_{22}R\_{5}^{2}}{R\_{5}+R\_{6}}=E\_{2}+E\_{3}$

$I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}+R\_{5}\right)-\frac{I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)^{2}}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}+R\_{4}}-\frac{I\_{22}R\_{5}^{2}}{R\_{5}+R\_{6}}=E\_{2}+E\_{3}-\frac{\left(E\_{1}+E\_{2}\right)\left(R\_{3}+R\_{4}\right)}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}+R\_{4}}$

Подставим исходные данные в полученное выражение:

$I\_{22}\left(3+2+4\right)-\frac{I\_{22}\left(3+2\right)^{2}}{1+1+3+2}-\frac{I\_{22}∙4^{2}}{4+4}=80+40-\frac{\left(40+80\right)\left(3+2\right)}{1+1+3+2}$

$9I\_{22}-\frac{25}{7}I\_{22}-2I\_{22}=120-\frac{600}{7}$

$\frac{24}{7}I\_{22}=\frac{240}{7}$

$I\_{22}=\frac{240}{7}∙\frac{7}{24}=\frac{240}{24}=10$  А.

$I\_{33}=\frac{I\_{22}R\_{5}}{R\_{5}+R\_{6}}=\frac{10∙4}{4+4}=5$ А.

$I\_{11}=\frac{I\_{22}\left(R\_{3}+R\_{4}\right)-E\_{1}-E\_{2}}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}+R\_{4}}=\frac{10\left(3+2\right)-40-80}{7}=\frac{50-40-80}{7}=-10$ А.

Контурный ток равен действительному току, который принадлежит только этому контуру. Т.е., если ток протекает только в одном контуре, то он равен контурному. Но, нужно учитывать направление обхода, в нашем случае ток *I*1 не совпадает с направлением тока *I*11, поэтому берем его со знаком минус. Следовательно,

$I\_{5}=I\_{22}=10$ А.

$I\_{1}=-I\_{11}=10$ А.

$I\_{4}=I\_{33}=5$ А.

Токи, протекающие через общие сопротивления определяем как алгебраическую сумму контурных, учитывая направление обхода. Таким образом получаем:

$I\_{2}=I\_{22}-I\_{11}=10+10=20$ А.

$I\_{3}=I\_{22}-I\_{33}=10-5=5$ А.

Найденные по методу контурных токов значения токов в ветвях схемы полностью совпадают с рассчитанными раннее по законам Кирхгофа. Следовательно, расчет по методу контурных токов выполнен верно.

**Метод узловых напряжений**

Данный метод основан на составлении уравнений по 1-му закону Кирхгофа. При этом, потенциал одного из узлов цепи принимается равным нулю, что позволяет сократить число уравнений для нашей схемы до *NУ*−1 = 3−1 = 2 штук.

Условно примем потенциал узла №1 равным 0, т.е. $φ\_{1}=0$. Направления токов в ветвях выберем аналогично Рис. 3. Для наглядности перерисуем исходную схему.



Рис. 5. Исходная схема для расчета методом узловых напряжений

Составим уравнения по 1-му закону Кирхгофа для узлов №2 и 3:

$I\_{3}+I\_{4}=I\_{5}$;

$I\_{2}=I\_{1}+I\_{3}+I\_{4}$.

Используя обобщённый закон Ома составим уравнения для нахождения каждого из токов (за *φ*i берем потенциал узла из которого ток выходит, а за *φ* потенциал узла в который ток входит).

$I\_{i}=\frac{φ\_{i}-φ+E\_{i}}{R\_{i}}$

$I\_{1}=\frac{φ\_{3}-0+E\_{1}}{R\_{1}+R\_{2}}$;

$I\_{2}=\frac{0-φ\_{3}+E\_{2}}{R\_{3}+R\_{4}}$;

$I\_{3}=\frac{φ\_{3}-φ\_{2}+0}{R\_{5}}$;

$I\_{4}=\frac{φ\_{3}-φ\_{2}+0}{R\_{6}}$;

$I\_{5}=\frac{φ\_{2}-0+E\_{3}}{0}$.

Исходя из выражения для тока *I*5, следует, что $φ\_{2}=-E\_{3}=-40$ В.

Подставим полученные выражения для токов в составленное уравнение по 1-му закону Кирхгофа для узла №3:

$I\_{2}=I\_{1}+I\_{3}+I\_{4}$

$\frac{0-φ\_{3}+E\_{2}}{R\_{3}+R\_{4}}=\frac{φ\_{3}-0+E\_{1}}{R\_{1}+R\_{2}}+\frac{φ\_{3}-φ\_{2}+0}{R\_{5}}+\frac{φ\_{3}-φ\_{2}+0}{R\_{6}}$.

Подставим исходные данные в полученное уравнение и решим его:

$\frac{0-φ\_{3}+80}{3+2}=\frac{φ\_{3}-0+40}{1+1}+\frac{φ\_{3}+40+0}{4}+\frac{φ\_{3}+40+0}{4}$

$-\frac{φ\_{3}}{5}+16=\frac{φ\_{3}}{2}+20+\frac{φ\_{3}}{4}+10+\frac{φ\_{3}}{4}+10$

$-\frac{φ\_{3}}{5}-\frac{φ\_{3}}{2}-\frac{φ\_{3}}{4}-\frac{φ\_{3}}{4}=20+10+10-16$

$\frac{-4φ\_{3}-10φ\_{3}-5φ\_{3}-5φ\_{3}}{20}=24$

$-24φ\_{3}=480$

$φ\_{3}=-20$ В.

Зная величины потенциалов узлов, найдем значения токов в ветвях схемы:

$I\_{1}=\frac{φ\_{3}-0+E\_{1}}{R\_{1}+R\_{2}}=\frac{-20-0+40}{1+1}=10$ А.

$I\_{2}=\frac{0-φ\_{3}+E\_{2}}{R\_{3}+R\_{4}}=\frac{0+20+80}{3+2}=20$ А.

$I\_{3}=\frac{φ\_{3}-φ\_{2}+0}{R\_{5}}=\frac{-20+40+0}{4}=5$ А.

$I\_{4}=\frac{φ\_{3}-φ\_{2}+0}{R\_{6}}=\frac{-20+40+0}{4}=5$ А.

Ток *I*5 определим по выражению, составленному по 1-му закону Кирхгофа для узла №2:

$I\_{5}=I\_{3}+I\_{4}=5+5=10$ А.

Найденные по методу узловых напряжений значения токов в ветвях схемы полностью совпадают с рассчитанными раннее по законам Кирхгофа и методу контурных токов. Следовательно, расчет по методу узловых напряжений выполнен верно.

Вольтметр в нашей схеме подключен к узлам №1 и №3, следовательно, данный прибор измеряет разность потенциалов между этими узлами, т.е.

$V=φ\_{1}-φ\_{3}=0-20=20$ В.

Показания вольтметра, также совпадают с рассчитанным ранее значением по законам Кирхгофа.