Содержание

Задание №1 3

Задание №2 4

Задание №3 6

Задание №4 7

Задание №5 8

Задание №6 9

Список литературы 14

Задание №1

Три орудия при одном выстреле попадают по цели с вероятностью 0,5, 0,8 и 0,7 соответственно. Цель поражена, если есть хотя бы одно попадание. Найти вероятность поражения цели, если все орудия сделают по одному выстрелу?

Решение

Пусть событие А состоит в том, что цель поражена.

Орудия попадают в цель или нет , но стреляют независимо друг от друга.

Вероятности попаданий для 1-го, 2-го и 3-го орудий равны соответственно:

$p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}7$

Тогда вероятности промахов соответственно равны:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – для 1 орудия

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – для 2 орудия

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ – для 3 орудия

Вероятность события А находим по формуле вероятности появления хотя бы одного события:

$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}97$

Ответ: $P(A) = 0{,}97$

Задание №2

Дана вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний. Используя формулы Бернулли, Лапласа или Пуассона найдите вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится: а) ровно k раз б) не менее k_1 раз и не более k_2 раз

p	n	k	k_1	k_2
0,5	900	300	400	450

Решение

а) Так как n=900 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x = (k - np)/\sqrt{npq}$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Найдем значение *x*:

$$x = \frac{(k - np)}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{300 - 900 \cdot 0{,}5}{\sqrt{900 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -10$$

Функция $\varphi(x)$ – четная, поэтому $\varphi(-10) = \varphi(10) = 7{,}7 \cdot 10^{-23} \approx 0{,}00$.

Искомая вероятность

$$P_{900}(300) = \frac{\varphi(10)}{\sqrt{900 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{7{,}7 \cdot 10^{-23}}{\sqrt{900 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 5{,}13 \cdot 10^{-24} \approx 0{,}00$$

б) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{400 - 900 \cdot 0{,}5}{\sqrt{900 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -3{,}33$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{450 - 900 \cdot 0{,}5}{\sqrt{900 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0$$

Искомая вероятность:

$$P_{900}(400,\ 450) = \Phi(0) - \Phi(-3{,}33) = \Phi(0) + \Phi(3{,}33) =$$
$$= 0{,}0000 + 0{,}4995 = 0{,}4995$$

Ответ: а) $P_{900}(300) = 0{,}00$; б) $P_{900}(400,\ 450) = 0{,}4995$

Задание №3

Задан закон распределения дискретной случайной величины Х. Найдите М(Х), D(X), σ*(X)*

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Решение

Математическое ожидание Х:

$$M(X) = \sum x_i \cdot p_i =$$

$$= 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 = 2$$

Дисперсия Х:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}4 - 2^2 = 1$$

Среднее квадратическое отклонение Х:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1} = 1$$

Задание №4

Дана интегральная функция распределения случайной величины X. Найдите дифференциальную функцию (плотность) распределения, математическое ожидание , дисперсию и среднеквадратическое отклонение

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<2 \\ (x-2)^2 & при \quad 2\le x\le 3 \\ 1 & при \quad x>3 \end{cases}$$

Решение

Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<2 \\ 2(x-2) & при \quad 2\le x\le 3 \\ 0 & при \quad x>3 \end{cases}$$

Математическое ожидание найдем по формуле:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{2} x\cdot 0dx+\int_{2}^{3} x(2(x-2))dx+\int_{3}^{\infty} x\cdot 0dx=\int_{2}^{3}(2x^2-4x)dx=$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3=\left(\frac{2x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\left(\frac{2\cdot 3^3}{3}-2\cdot 3^2\right)-\left(\frac{2\cdot 2^3}{3}-2\cdot 2^2\right)=(18-18)-\left(\frac{16}{3}-8\right)=\frac{8}{3}$$

дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2=\int_{-\infty}^{2} x^2\cdot 0dx+\int_{2}^{3} x^2(2(x-2))dx+\int_{3}^{\infty} x^2\cdot 0dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=$$

$$=\int_{2}^{3}(2x^3-4x^2)dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{2x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3=\left(\frac{2\cdot 3^4}{4}-\frac{4\cdot 3^3}{3}\right)-\left(\frac{2\cdot 2^4}{4}-\frac{4\cdot 2^3}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{81}{2}-36\right)-\left(8-\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{1}{18}\approx 0{,}0556$$

Среднее квадратическое отклнение:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}0556}\approx 0{,}236$$

Задание №5

Диаметр деталей есть случайная величина, распределенная по нормальному закону. Среднее значение диаметра равно a мм, а среднеквадратическое отклонение равно σ мм. Найти: 1) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше α мм и меньше β мм; 2) вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более чем на δ мм ?

a = 214 мм, σ = 6 мм

α = 205 мм, β =224 мм

δ =3 мм

Решение

1) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше 205 мм и меньше 224 находим по формуле:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа

Таким образом:

$$P(205 \le X \le 224) = \Phi\left(\frac{224-214}{6}\right) - \Phi\left(\frac{205-214}{6}\right) = ,$$
$$= \Phi(1{,}67) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1{,}67) + \Phi(1{,}5) = 0{,}4525 + 0{,}4332 = 0{,}8857$$

2) вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более чем на δ мм найдем по формуле:

$$P(|X - a| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Таким образом:

$$P(|X - 214| \le 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{6}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383$$

Задание №6

Имеется интервальное распределение выборочных значений случайной величины X, которые получены из опыта.

Требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;

б) перейти от интервального распределения к вариационному ряду (точечному выборочному распределению), взяв за значения вариант середины интервалов;

в) построить полигон относительных частот;

г) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

д) вычислить точечные выборочные (статистические) оценки числовых характеристик для X (выборочное среднее; выборочную дисперсию и исправленную выборочную дисперсию; выборочное и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение).

е) найти доверительный интервал для M(X) с надежностью 0,99 и для D(X) с надежностью 0,95, если известно, что случайная величина X распределена по нормальному закону.

(1,3)	(3,5)	(5,7)	(7,9)	(9,11)	(11,13)
3	5	18	16	6	2

Решение

Объем выборки:

$$n = 3+5+18+16+6+2 = 50$$

Длина интервалов: $\Delta x_i = 2$

а) рассчитаем относительные частоты интервалов по формуле

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

и плотности относительных частот по формуле

$$P_i^{'} = \frac{W_i}{\Delta x_i}$$

X	(1,3)	(3,5)	(5,7)	(7,9)	(9,11)	(11,13)
n_i	3	5	18	16	6	2
W_i	0.06	0.1	0.36	0.32	0.12	0.04
P_i'	0.03	0.05	0.18	0.16	0.06	0.02

Гистограмма относительных частот – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы, а высоты равны плотностям относительных частот.

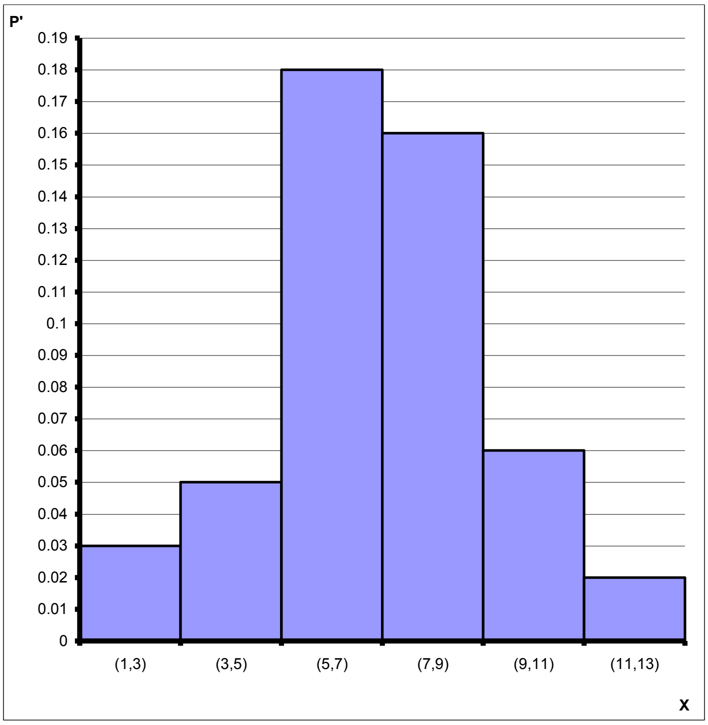

Рис.1. Гистограмма относительных частот

б) переходим к точечному выборочному распределению, взяв за значения вариант середины интервалов:

x_i	2	4	6	8	10	12
n_i	3	5	18	16	6	2
W_i	0.06	0.1	0.36	0.32	0.12	0.04

в) Полигон относительных частот представляет собой ломаную, соединяющую точки с координатами $(x_i; W_i)$ – рис.2;

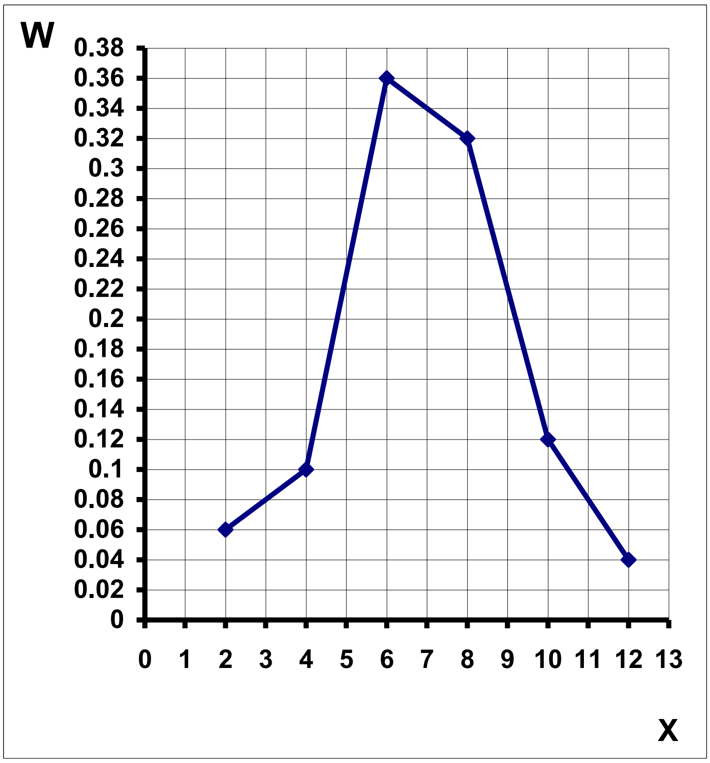

Рис.2. Полигон относительных частот

г) Эмпирическая функция распределения строится по формуле:

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

где n_x - число вариант, меньших чем x.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2 \\ 0{,}06 & \text{при} \quad 2<x\le 4 \\ 0{,}16 & \text{при} \quad 4<x\le 6 \\ 0{,}52 & \text{при} \quad 6<x\le 8 \\ 0{,}84 & \text{при} \quad 8<x\le 10 \\ 0{,}96 & \text{при} \quad 10<x\le 12 \\ 1 & \text{при} \quad x>12 \end{cases}$$

График эмпирической функциираспределения – рис.3:

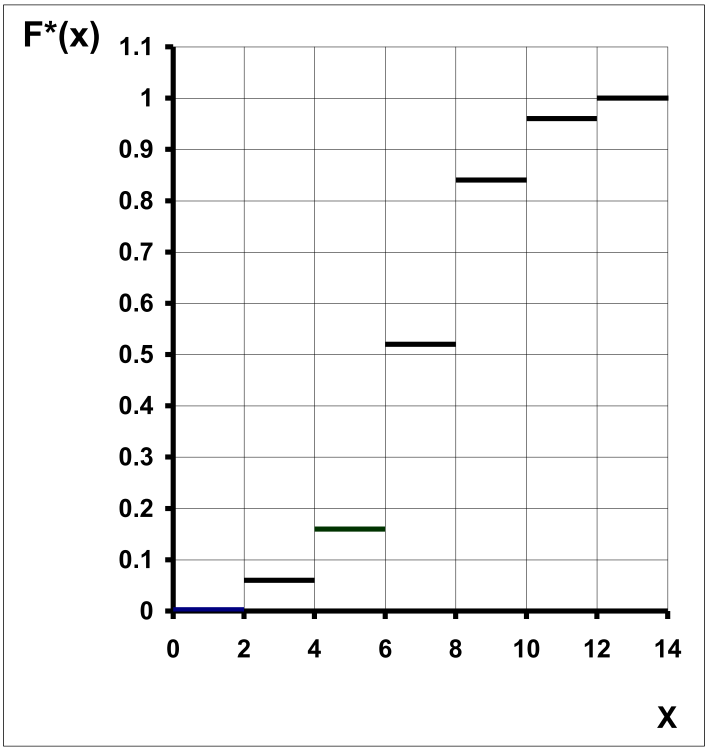

Рис.3. График эмпирической функции распределения

д) вычислим точечные выборочные (статистические) оценки числовых характеристик для X:

выборочное среднее:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{50}(2\cdot 3 + 4\cdot 5 + 6\cdot 18 + 8\cdot 16 + 10\cdot 6 + 12\cdot 2) = 6{,}92$$

выборочная дисперсия:

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \left(\overline{x_в}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{50}(2^2\cdot 3 + 4^2\cdot 5 + 6^2\cdot 18 + 8^2\cdot 16 + 10^2\cdot 6 + 12^2\cdot 2) - 6{,}92^2 = 5{,}1536$$

исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{50}{49}\cdot 5{,}1536 = 5{,}2588$$

выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D_в} = \sqrt{5{,}1536} = 2{,}27$$

исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение):

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{5{,}2588} = 2{,}29$$

е) для нормально распределенного признака X, доверительные интервалы, покрывающие с надежностью γ его неизвестные математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) имеют вид:

$$M(X) \in \left(\overline{x_в} - \Delta; \overline{x_в} + \Delta\right), \text{ где } \Delta = t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$D(X) \in \left(S^2 \cdot (1-q)^2; \quad S^2 \cdot (1+q)^2\right)$$

При γ=0,99: α=1- γ=0,01

t_γ= t_γ(0,01; 50-1)= t_γ(0,01; 49)=2,679

$$\Delta = 2{,}679 \cdot \frac{2{,}29}{\sqrt{50}} \approx 0{,}868$$

$$M(X) \in \left(6{,}92 - 0{,}868; \quad 6{,}92 + 0{,}868 \right)$$

$$M(X) \in \left(6{,}052; \quad 7{,}788 \right)$$

При γ=0,95: α=1- γ=0,05

q=q_γ= t_γ(0,95; 50)= 0,21

$$D(X) \in \left(5{,}2588 \cdot (1-0{,}21)^2; \quad 5{,}2588 \cdot (1+0{,}21)^2\right)$$

$$D(X) \in \left(3{,}2820; \quad 7{,}6994\right)$$

Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. Пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 404с.
3. Высшая математика для экономических специальностей / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Высшее образование, 2007. –893с.
4. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544с.
5. Просветов Г.И. Математические методы в экономике: Учебно-методическое пособие. – М.: Издательство РДЛ, 2004. – 160с.
6. Просветов Г.И. Математические модели в экономике: Учебно-методическое пособие. – М.: Издательство РДЛ, 2005. – 152с.