Задача №1.9

Тело падает с высоты $h = 1\ км$ с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, какое время понадобится телу для прохождения: 1) первых 10 *м* своего пути; 2) последних 10 *м* своего пути. Ответ: 1) 1,43 *с*; 2) 0,1 *с*.

Решение:

Дано:	СИ:
$h = 1\ км$	$1000\ м$
$v_{01} = 0$	
$S_1 = 0$	
$S_2 = 0$	
$h_2 = 0$	
$t_1 - ?$	
$t_2 - ?$	

Воспользуемся законом равноускоренного движения

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (1).$$

$\vec{a} = \vec{g}$, так как по условию задачи сопротивлением воздуха пренебрегаем. Значит,

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \quad (2).$$

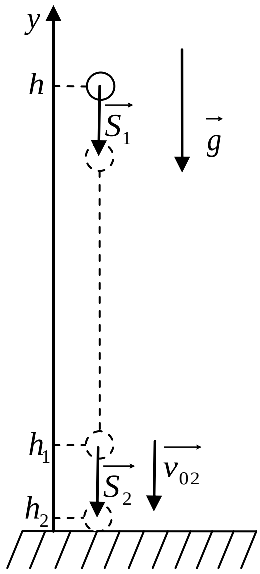
1. Запишем формулу (2) для первого случая:

$$\vec{S}_1 = \vec{v}_{01} t_1 + \frac{\vec{g}t_1^2}{2} \quad (3).$$

Учитывая, что $v_{01} = 0$, получим

$$\vec{S}_1 = \frac{\vec{g}t_1^2}{2} \quad (4).$$

Найдем проекцию (4) на ось Оу:



$$-S_1 = -\frac{gt_1^2}{2};$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{g}} \quad (5);$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ м}{10\ \frac{м}{с^2}}} \approx 1{,}43\ с.$$

2. Запишем формулу (2) для второго случая:

$$\vec{S}_2 = \vec{v}_{02} t_2 + \frac{\vec{g}t_2^2}{2} \quad (6).$$

Найдем проекцию (6) на ось Оу:

$$-S_2 = -v_{02}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} \quad (7);$$

$$\frac{gt_2^2}{2} + v_{02}t_2 - S_2 = 0 \,\Big|\cdot 2;$$

$$gt_2^2 + 2v_{02}t_2 - 2S_2 = 0;$$

$$D = (2v_{02})^2 - 4g \cdot (-2S_2) = 4\left(v_{02}^2 + 2gS_2\right);$$

$$t_2 = \frac{-2v_{02} \pm 2\sqrt{v_{02}^2 + 2gS_2}}{2g} = \frac{-v_{02} \pm \sqrt{v_{02}^2 + 2gS_2}}{g};$$

$$t_2 \neq \frac{-v_{02} - \sqrt{v_{02}^2 + 2gS_2}}{g},$$

так как время не может быть отрицательным.

Значит,

$$t_2 = \frac{-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gS_2}}{g} \quad (8).$$

Найдем скорость тела v_{02} на высоте h_1 по формуле

$$h - S_2 = \frac{v_{02}^2 - v_{01}^2}{2g}.$$

Учитывая, что $v_{01} = 0$, получим

$$h - S_2 = \frac{v_{02}^2}{2g};$$

$$v_{02} = \sqrt{2g(h - S_2)} \quad (9).$$

Подставим (9) в (8):

$$t_2 = \frac{-\sqrt{2g(h-S_2)} + \sqrt{\left(\sqrt{2g(h-S_2)}\right)^2 + 2gS_2}}{g} = \frac{-\sqrt{2g(h-S_2)} + \sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2(h-S_2)}{g}};$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left(\sqrt{h} - \sqrt{h - S_2}\right) \quad (10).$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{9{,}8\ \frac{м}{с^2}}} \cdot \left(\sqrt{1000\ м} - \sqrt{1000\ м - 10\ м}\right) \approx 0{,}1\ с.$$

Ответ: 1) 1,43 с; 2) 0,1 с.

Задача №1.15

С башни высотой $h = 30\,м$ в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью $v_0 = 10\,\frac{м}{с}$. Определить:

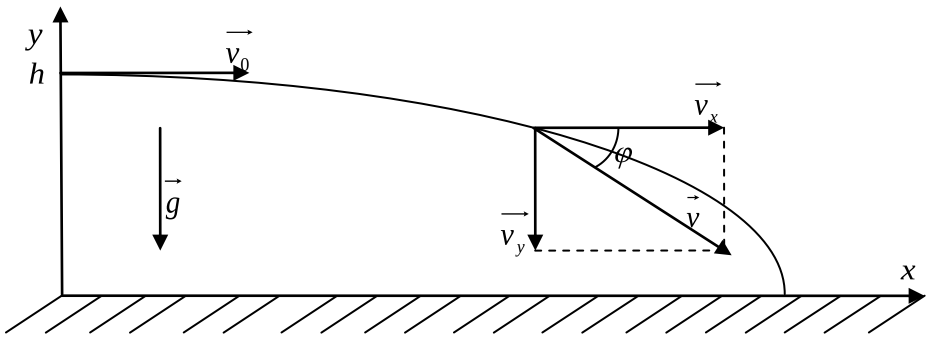
1) уравнение траектории тела $y(x)$;
2) скорость v тела в момент падения на Землю;
3) угол φ, который образует эта скорость с горизонтом в точке его падения.

Ответ: 1) $y(x) = \frac{g}{2v_0^2}x^2$; 2) $26{,}2\,\frac{м}{с}$; 3) $67{,}8°$.

Решение:

Дано:
$h = 0$
$\varphi_0 = 0$
$v_0 = 10\,\frac{м}{с}$

$y(x) - ?$
$v - ?$
$\varphi - ?$



1. Допуст
   им, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Воспользуемся формулой (2) из задачи 1.9:

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \quad (1).$$

Найдем проекцию (1) на ось Oy:

$$S_y = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}.$$

Учитывая, что $S_y = -y$, $v_{0y} = 0$ и $g_y = -g$, получим

$$-y = -\frac{gt^2}{2} \quad (2).$$

Найдем проекцию (1) на ось Ox:

$$S_x = v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2}.$$

Учитывая, что $S_x = -x$, $v_{0x} = v_0$ и $g_x = 0$, получим

$$x = v_0 t.$$

Из последней формулы видно, что по оси x тело движется равномерно.

$$t = \frac{x}{v_0} \quad (3).$$

Подставим (3) в (2):

$$y = \frac{g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2}{2} = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (4).$$

2. Найдем скорость тела в момент падения тела на землю по формуле:

$$\frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = \vec{g} \quad (5).$$

Найдем проекцию (5) на ось Oy:

$$\frac{v_y - v_{0y}}{t} = g_y \text{ или } \frac{-v_y}{t} = -g;$$

$$v_y = gt \text{ (6).}$$

Выразим из (2) *t*:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ (7).}$$

За время падения тело проходит путь $y = h$. Тогда (7) примет вид

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ (8).}$$

Подставим (8) в (6):

$$v_y = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \text{ (9).}$$

Найдем проекцию (5) на ось Ox:

$$\frac{v_x - v_{0x}}{t} = g_x \text{ или } \frac{v_x - v_0}{t} = 0;$$

$$v_x = v_0 \text{ (10).}$$

Как говорилось выше и как видно из формулы (10), по оси Ox тело движется с постоянной скоростью.

Из рисунка видно, что

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \text{ или } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \text{ (11).}$$

Подставим (9) и (10) в (11):

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \text{ (12).}$$

$$v = \sqrt{\left(10\,\frac{м}{с}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 30\ м} \approx 26{,}2\,\frac{м}{с}.$$

3. Из рисунка видно, что

$$tg\varphi = \frac{v_y}{v_x} \text{ (13).}$$

Подставим (9) и (10) в (13):

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0};$$

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \text{ (14).}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 30\ м}}{10\,\frac{м}{с}} \approx 67{,}7^\circ.$$

Ответ: 1) $y(x) = \frac{g}{2v_0^2}x^2$; 2) $26{,}2\,\frac{м}{с}$; 3) $67{,}7^\circ$.

Задача №1.29

Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ *рад/с*^{2}. Определить радиус колеса, если через $t = 1$ *с* после начала движения полное ускорение колеса $a = 7{,}5$ *м/с*^{2}. Ответ: 79 *см*.

Решение:

Дано:	
$\varepsilon = 0$	
$v_0 = 0$	
$t = 1\,c$	
$a = 7{,}5\,\frac{м}{c^2}$	
$R - ?$	

Из рисунка видно, что

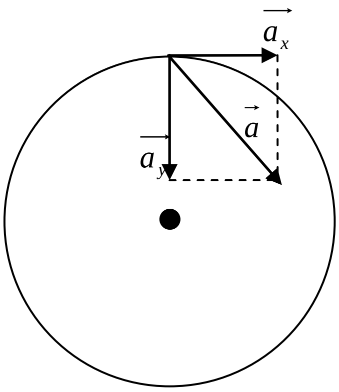
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

или в скалярной форме

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \quad (1).$$

$$a_\tau = \varepsilon R \quad (2).$$

$$a_n = \omega^2 R \quad (3).$$



ω найдем по формуле $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. Так как $v_0 = 0$, то

$$\omega = \varepsilon t \quad (4).$$

Подставим (4) в (3):

$$a_n = (\varepsilon t)^2 R = \varepsilon^2 t^2 R \quad (5).$$

Подставим (5) и (2) в (1):

$$a = \sqrt{\left(\varepsilon^2 t^2 R\right)^2 + (\varepsilon R)^2} = \sqrt{\varepsilon^4 t^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = \varepsilon R\sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1};$$

$$R = \frac{a}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1}} \quad (6).$$

$$R = \frac{7{,}5\,\frac{м}{c^2}}{3\,\frac{рад}{c^2}\sqrt{\left(3\,\frac{рад}{c^2}\right)^2 \cdot (1\,c)^4 + 1}} \approx 0{,}79\ м = 79\ см.$$

Ответ: 79 *см*.

Задача №2.9

Граната, летящая со скоростью v = 10 *м/с*, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0,6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью u_1 = 25 *м/с*. Найти скорость u_2 меньшего осколка. Ответ: u_2 = –12,5 *м/с*.

Решение:

Дано:

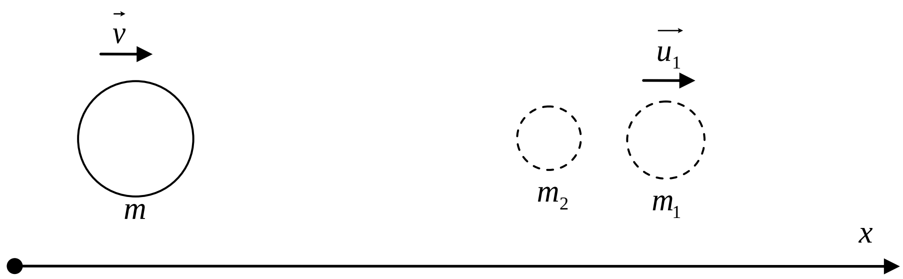
$v = 10\ \frac{м}{с}$

$m_1 = 0{,}6\ m$

$m_2 = 0{,}4\ m$

$u_1 = 25\ \frac{м}{с}$

$u_2 - ?$



Считая систему замкнутой, то есть пренебрегая сопротивлением воздуха, запишем закон сохранения импульса:

$$m\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \quad (1).$$

Найдем проекцию (1) на ось Ox:

$$mv = m_1u_1 + m_2u_2 \quad (2).$$

u_2 берем со знаком плюс, потому что направление движения меньшего осколка не известно. Выразим u_2 из (2) и воспользуемся данными:

$$u_2 = \frac{mv - m_1u_1}{m_2} = \frac{mv - 0{,}6mu_1}{0{,}4m} = \frac{v - 0{,}6u_1}{0{,}4};$$

$$u_2 = \frac{v - 0{,}6u_1}{0{,}4}.$$

$$u_2 = \frac{10\ \frac{м}{с} - 0{,}6 \cdot 25\ \frac{м}{с}}{0{,}4} = -12{,}5\ \frac{м}{с}.$$

Из ответа видно, что меньший осколок движется в направлении, противоположном первоначальному.

Ответ: u_2 =–12,5 *м/с*.

Задача №2.18

Ракета, масса которой в начальный момент $M = 300$ *г*, начинает выбрасывать продукты сгорания с относительной скоростью $u = 200$ *м/с*. Расход горючего $\mu = 100$ *г/с*. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить: 1) за какой промежуток времени скорость ракеты станет равной $v_1 = 50$ *м/с*; 2) скорость v_2, которую достигнет ракета, если масса заряда $m_0 = 0,2$ *кг*. Ответ: 1) 0,66 *с*; 2) 220 *м/с*.

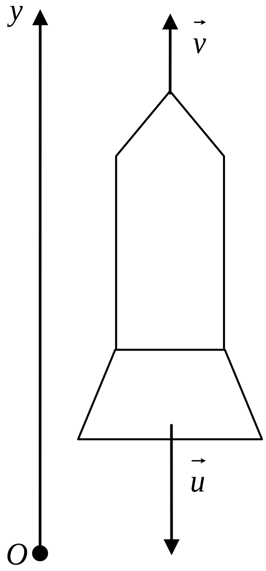
Решение:

Дано:	СИ:
$M = 300$ *г*	0,3 *кг*
$u = 200\ \frac{м}{с}$	
$\mu = 100\ \frac{г}{с}$	$0,1\ \frac{кг}{с}$
$v_1 = 50\ \frac{м}{с}$	
$m_0 = 0,2$ *кг*	
1) $t - ?$	
2) $v_2 - ?$	

Пусть в некоторый момент времени t ракета имела массу m_p и скорость v (относительно интересующей нас системы отсчета), а масса выбрасываемых газов m_t. Рассмотрим инерциальную систему отсчета, имеющую ту же скорость, что и ракета в данный момент времени. В этой системе отсчета приращение импульса системы «ракета – выброшенная порция газа» за время dt есть

$$d\vec{p} = m_p d\vec{v} + \vec{u}dm_t = \vec{F}dt;$$

$$m_p \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u}\frac{dm_t}{dt} = \vec{F} \quad (1).$$



Найдем проекцию (1) на ось Оу. По условию задачи, внешним силовым полем и сопротивлением воздуха пренебрегаем. Тогда уравнение (1) запишем так:

$$m_p \frac{dv}{dt} - u\frac{dm_t}{dt} = 0 \quad (2).$$

Решим уравнение (2):

$$m_p \frac{dv}{dt} = u\frac{dm_t}{dt};$$

$$\frac{dm_t}{m_p} = \frac{dv}{u};$$

$$\frac{dm_t}{M - m_t} = \frac{dv}{u} \quad (3).$$

1. Сначала найдем время t, за которое ракета разгонится до скорости v_1, воспользовавшись формулой (3).

$$\frac{dv}{u} = \frac{dm_t}{M - m_t};$$

$$\frac{dv}{u} = \frac{d\mu t}{M - \mu t} = \frac{dt}{\frac{M}{\mu} - t};$$

$$\int_0^{v_1} \frac{dv}{u} = \int_0^t \frac{dt}{\frac{M}{\mu} - t};$$

$$\frac{v_1}{u} = \int_t^0 \frac{dt}{t - \frac{M}{\mu}} = \ln\left(t - \frac{M}{\mu}\right)\Bigg|_t^0 = \ln\frac{-\frac{M}{\mu}}{t - \frac{M}{\mu}};$$

$$e^{\ln\frac{-\frac{M}{\mu}}{t-\frac{M}{\mu}}} = e^{\frac{v_1}{u}};$$

$$\frac{-\frac{M}{\mu}}{t-\frac{M}{\mu}} = e^{\frac{v_1}{u}};$$

$$\left(\frac{M}{\mu}-t\right)e^{\frac{v_1}{u}} = \frac{M}{\mu};$$

$$\frac{M}{\mu}e^{\frac{v_1}{u}} - te^{\frac{v_1}{u}} = \frac{M}{\mu};$$

$$te^{\frac{v_1}{u}} = \frac{M}{\mu}e^{\frac{v_1}{u}} - \frac{M}{\mu};$$

$$t = \frac{M}{\mu} - \frac{M}{\mu}e^{-\frac{v_1}{u}} = \frac{M}{\mu}\left(1-e^{-\frac{v_1}{u}}\right) \quad (4).$$

Подставим числовые данные в (4):

$$t = \frac{0{,}3\,кг}{0{,}1\frac{кг}{с}}\left(1-e^{-\frac{50\frac{м}{с}}{200\frac{м}{с}}}\right) \approx 0{,}66\,с\,.$$

2. Найдем скорость, до которого разгонится ракета, при полном сгорании топлива по формуле (3):

$$\int_0^{v_2}\frac{dv}{u} = \int_0^{m_0}\frac{dm_t}{M-m_t};$$

$$\int_0^{v_2}\frac{dv}{u} = \int_{m_0}^{0}\frac{dm_t}{m_t-M};$$

$$\frac{v_2}{u} = \ln\left(m_t-M\right)\Big|_{m_0}^{0} = \ln\frac{-M}{m_0-M} = \ln\frac{M}{M-m_0};$$

$$v_2 = u\ln\frac{M}{M-m_0} \quad (5).$$

Подставим числовые данные в (5):

$$v_2 = 200\,\frac{м}{с}\cdot\ln\frac{0{,}3\,кг}{0{,}3\,кг-0{,}2\,кг} \approx 220\,\frac{м}{с} \quad (5).$$

Ответ: 1) 0,66 *с*; 2) 220 *м/с*.

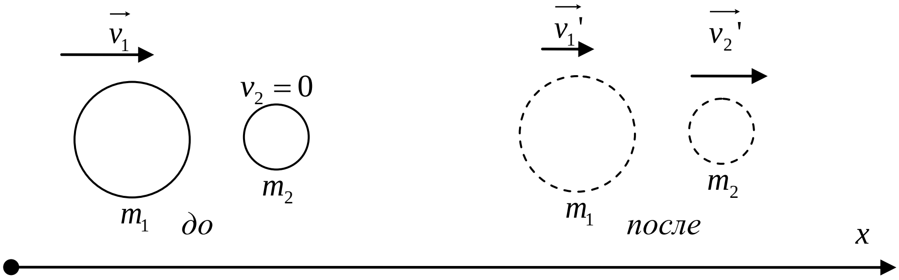
Задача №2.53

При центральном упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в 2 раза. Определить: 1) во сколько раз масса первого тела больше массы второго тела; 2) кинетическую энергию T'_2 второго тела непосредственно после удара, если первоначальная кинетическая энергия T_1 первого тела равна 800 *Дж*. Ответ: 1) в 3 раза; 2) 450 *Дж*.

Решение:

Дано:
m_1
m_2
$v_2 = 0$
$v_1 = 2v_1'$
$T_1 = 800$ *Дж*

1) $\dfrac{m_1}{m_2} - ?$
2) $T_2' - ?$



1. Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'} \quad (1).$$

Найдем проекцию (1) на ось Ох и учтем данные:

$$m_1 v_1 = m_1\frac{v_1}{2} + m_2 v_2';$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1 = m_2 v_2' \quad (2).$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (3).$$

С учетом данных формула примет вид:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{8} + \frac{m_2 v_2'^2}{2};$$

$$3m_1 v_1^2 = 4m_2 v_2'^2 \quad (4).$$

Решим совместно (2) и (4):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m_1 v_1 = m_2 v_2', \\ 3m_1 v_1^2 = 4m_2 v_2'^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2' = \dfrac{m_1 v_1}{2m_2}, \\ 3m_1 v_1^2 = 4m_2\left(\dfrac{m_1 v_1}{2m_2}\right)^2; \end{cases}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 3.$$

2. Кинетическая энергия первого тела до взаимодействия:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad (5).$$

Кинетическая энергия второго тела после взаимодействия:

$$T_2' = \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (6).$$

Перепишем (4) с учетом (5) и (6):

$$T_2' = \frac{3T_1}{4} \quad (7).$$

Подставим в (7) числовые данные:

$$T_2' = \frac{3 \cdot 800\, Дж}{4} = 600\, Дж\,.$$

Ответ: 1) в 3 раза; 2) 600 Дж.

Задача №3.9

Маховое колесо, момент инерции которого $J = 245$ *кг·м*^{2}, вращается с частотой $n = 20$ *об/с*. Через время $t = 1$ *мин* после того, как на колесо перестал действовать момент сил M, оно остановилось. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском. Ответ: 513 *Н·м*; 600.

Решение:

Дано:
$J = 245\,кг \cdot м^2$
$n = 20\dfrac{об}{с}$
$t = 1\,мин$
$\omega = 0$
$M_{тр} - ?$
$N - ?$

Колесо останавливается под действием сил трения. Значит,

$$M_{тр} = J\varepsilon \ (1).$$

Считая, что колесо вращается равнозамедленно, получим

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}.$$

С учетом данных, получим

$$\varepsilon = \frac{-\omega_0}{t} \ (2).$$

Подставим (2) в (1):

$$M_{тр} = -J\frac{\omega_0}{t} \ (3).$$

Начальная угловая скорость

$$\omega_0 = 2\pi n \ (4).$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$M_{тр} = -\frac{2\pi nJ}{t} \ (5).$$

Подставим в (5) данные:

$$M_{тр} = -\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20\dfrac{об}{с} \cdot 245\,кг \cdot м^2}{60\,с} \approx -513\,Н \cdot м.$$

Знак минус означает, что момент сил трения направлен против движения.
Число оборотов колеса можно определить из условия

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} \ (6).$$

Воспользуемся уравнением кинематики вращательного движения:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \ (7).$$

Подставим (2) в (7):

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{-\dfrac{\omega_0}{t}t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2} \ (8).$$

Подставим (4) в (8):

$$\varphi = \frac{2\pi nt}{2} = \pi nt \ (9).$$

Подставим (9) в (6):

$$N = \frac{\pi nt}{2\pi} = \frac{nt}{2} \ (10).$$

Подставим данные в (10):

$$N = \frac{20\frac{об}{с}\cdot 60\,с}{2} = 600\,об\,.$$

Ответ: 513 $Н{\cdot}м$; 600.

Задача №3.23

Карандаш длиной l = 15 *см*, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость υ будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша? Ответ: $\omega_c = \omega_к$ = 14 *рад/с*; υ_c = 1,05 *м/с*, $\upsilon_к$ = 2,1 *м/с*.

Решение:

Дано:	СИ:
$l = 15\,см$	$0{,}15\,м$
$\omega_c - ?$	
$\omega_к - ?$	
$v_c - ?$	
$v_к - ?$	

По закону сохранения энергии потенциальная энергия вертикально стоящего карандаша переходит в кинетическую энергию его вращательного движения:

$$W_p = W_k \quad (1).$$

Если разбить карандаш на бесконечно малые части массой dm и длиной dl , то каждая часть будет «падать» на стол с разной высоты. Массу карандаша запишем так:

$$m = \rho l \quad (2),$$

где ρ – линейная плотность.

Потенциальную энергию найдем путем дифференцирования:

$$W_p = \int_0^l mgdl \quad (3).$$

Подставим (2) в (3):

$$W_p = \int_0^l \rho gldl = \rho g\int_0^l ldl = \rho g\int_0^l \frac{dl^2}{2} = \frac{\rho gl^2}{2} \quad (4).$$

Преобразуем (4), используя (2):

$$W_p = \frac{mgl}{2} \quad (5).$$

Кинетическая энергия вращательного движения:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2} \quad (6).$$

Момент инерции карандаша в данной задаче определяется по формуле

$$J = \frac{ml^2}{3} \quad (7).$$

Подставим (7) в (6):

$$W_k = \frac{\frac{ml^2}{3}\omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6} \quad (8).$$

Подставим (5) и (8) в (1):

$$\frac{mgl}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6} \cdot \Bigg| \frac{2}{ml};$$

$$g = \frac{l\omega^2}{3};$$

$$\omega = \omega_c = \omega_к = \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad (9).$$

Подставим в (9) числовые данные:

$$\omega_c = \omega_к = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2}}{0{,}15\,м}} \approx 14\,\frac{рад}{с}.$$

Скорость середины карандаша:

$$v_c = \frac{\omega l}{2}.$$

$$v_c = \frac{14\,\frac{рад}{с}\cdot 0{,}15\,м}{2} = 1{,}05\,\frac{м}{с}.$$

Скорость верхнего конца карандаша:

$$v_к = \omega l.$$

$$v_к = 14\,\frac{рад}{с}\cdot 0{,}15\,м = 2{,}1\,\frac{м}{с}.$$

Ответ: $\omega_c = \omega_к = 14$ *рад/с*; $\upsilon_c = 1{,}05$ *м/с*, $\upsilon_к = 2{,}1$ *м/с*.

Задача №4.9

Ионизованный атом, вылетев из ускорителя со скоростью 0,8 с, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя. Ответ: c.

Решение:

Дано:	
$v_{и} = 0{,}8\ c$	В любой системе отсчета скорость частиц, не обладающих массой покоя, равна нулю. Значит, скорость фотона:
$v_{ф} - ?$	$$v_{ф} = c\ .$$

Ответ: c.

Задача №5.9

Материальная точка массой $m = 50\ г$ совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1\cos\frac{3\pi}{2}t\ м$. Определить: 1) возвращающую силу F для момента времени t = 0,5 *с*; 2) полную энергию E точки. Ответ:1) 78,5 *мН*; 2) 5,55 *мДж*.

Решение:

Дано:	СИ:
$m = 50\ г$	0,05 *кг*
$x = 0{,}1\cos\frac{3\pi}{2}t\ м$	
$t = 0{,}5\ с$	
$F - ?$	
$E - ?$	

По второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}\ (1).$$

Известно, что скорость равна первой производной перемещения по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(0{,}1\cos\frac{3\pi}{2}t\right)}{dt} = -0{,}15\pi\sin\frac{3\pi}{2}t\ \frac{м}{с}.$$

Известно, что ускорение равно первой производной скорости по времени или второй производной перемещения по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(-0{,}15\pi\sin\frac{3\pi}{2}t\right)}{dt} = -0{,}225\pi^2\cos\frac{3\pi}{2}t\ \frac{м}{с^2}\ (2).$$

Подставим (2) в (1):

$$F = -0{,}225\pi^2 m\cos\frac{3\pi}{2}t\ (3).$$

Подставим в (3) числовые данные:

$$F = -0{,}225\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}05\,кг\cdot\cos\frac{3\cdot 3{,}14}{2}\cdot 0{,}5\,с \approx 0{,}0785\,Н = 78{,}5\,мН.$$

Полную энергию точки определим по формуле

$$E = E_{p\max} = \frac{kA^2}{2}\ (4),$$

где k – жесткость колебательной системы, A – амплитуда колебаний.

$$k = \omega^2 m\ (5),$$

где ω – циклическая (круговая) частота колебаний.

Подставим (5) в (4):

$$E = \frac{\omega^2 mA^2}{2}\ (6).$$

Из уравнения колебания видно, что A = 0,1 *см*, $\omega = \frac{3\pi}{2}\frac{рад}{с}$.

Подставим в (6) численные значения:

$$E = \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\frac{рад}{с}\right)^2\cdot 0{,}05\,кг\cdot(0{,}1\,м)^2}{2} \approx 0{,}005546\,Дж \approx 5{,}55\,мДж.$$

Ответ:1) 78,5 *мН*; 2) 5,55 *мДж*.

Задача №5.18

При подвешивании грузов массами $m_1 = 600$ *г* и $m_2 = 400$ *г* к свободным пружинам последние удлинились одинаково ($l = 10$ *см*). Пренебрегая массой пружин, определить: 1) периоды колебаний грузов; 2) какой из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией и во сколько раз. Ответ: 1) $T_1 = T_2 = 0{,}63$ *с*; 2) груз большей массы, в 1,5 раза.

Решение:

Дано:	СИ:
$m_1 = 600\ г$	$0{,}6\ кг$
$m_2 = 400\ г$	$0{,}4\ кг$
$l_1 = l_1 = l = 10\ см$	$0{,}1\ м$
$T_1 - ?$	
$T_2 - ?$	
$\dfrac{E_1}{E_2} - ?$	

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ (1).$$

По закону Гука

$$\overrightarrow{F_{упр}} = -k\vec{x} \ (2), \text{ где}$$

$\vec{x}$ - удлинение пружины. Пружина удлиняется под действием силы тяжести. По третьему закону Ньютона:

$$\overrightarrow{F_{упр}} = -m\vec{g} \ (3).$$

Подставим (3) в (2):

$$-m\vec{g} = -k\vec{x}.$$

Найдем проекцию на ось Oy:

$$mg = kx \ (4).$$

Перепишем (3) для каждой пружины:

$$m_1 g = k_1 l_1 \ (5),$$

$$m_2 g = k_2 l_2 \ (6).$$

Используя (5) и (1), получим

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{\frac{m_1 g}{l_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \ (7).$$

Аналогично используя (6) и (1), получим

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \ (8).$$

Используя (7) и (8) и данные, получим

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ (9).$$

$$T_1 = T_2 = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{\frac{0{,}1 м}{9{,}8\frac{м}{с^2}}} \approx 0{,}63 с.$$

Энергия первого груза

$$E_1 = \frac{k_1 l_1^2}{2} \ (10).$$

Выразим k_1 из (4) и подставим в (10):

$$E_1 = \frac{\frac{m_1 g}{l_1} l_1^2}{2} = \frac{m_1 g l_1}{2} = \frac{m_1 g l}{2} \ (11).$$

Аналогично получим для второго груза:

$$E_2 = \frac{m_2 g l}{2} \text{ (12).}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{m_1 g l}{2}}{\frac{m_2 g l}{2}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{0{,}6\,кг}{0{,}4\,кг} = 1{,}5\,кг.$$

Ответ: 1) $T_1 = T_2 = 0{,}63$ *с*; 2) груз большей массы, в 1,5 раза.

Задача №5.27

Математический маятник длиной $l = 50\,см$ подвешен в кабине самолета. Определить период T колебаний маятника, если самолет движется: 1) равномерно; 2) горизонтально с ускорением a = 2,5 м/с^2. Ответ:1) 1,42 $с$; 2) 1,4 $с$.

Решение:

Дано:	СИ:
$l = 50\,см$	$0{,}5\,м$
1) $v = const$	
2) $a = 2{,}5\,\frac{м}{с^2}$	
$T_1 - ?$	
$T_2 - ?$	

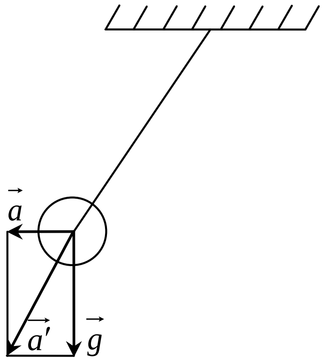
1) При равномерном движении математического маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1).$$

Подставим в (1) данные:

$$T_1 = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{\frac{0{,}5\,м}{9{,}8\,\frac{м}{с^2}}} \approx 1{,}42\,с.$$

2) При ускоренном движении математического маятника в горизонтальном направлении



$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}} \quad (2).$$

Как видно из рисунка

$$a' = \sqrt{a^2 + g^2} \quad (3).$$

Подставим (3) в (2):

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}} \quad (4).$$

Подставим в (4) данные:

$$T_2 = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{\frac{0{,}5\,м}{\sqrt{\left(2{,}5\,\frac{м}{с^2}\right)^2 + \left(9{,}8\,\frac{м}{с^2}\right)^2}}} \approx 1{,}40\,с.$$

Ответ:1) 1,42 $с$; 2) 1,4 $с$.

Задача №5.39

Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos 2\omega t$ *см* и $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$ *см*. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба. Ответ: $y = -4x/3$.

Решение:

Дано:	
$x = 3\cos 2\omega t\,см$	
$y = 4\cos 2(\omega t + \pi)см$	
$y(x) - ?$	

Преобразуем второе уравнение в данных, используя формулу приведения:

$$y = 4\cos 2(\omega t + \pi) = -4\cos 2\omega t \quad (1).$$

Выразим из обоих уравнений движения $\cos 2\omega t$:

$$\cos 2\omega t = \frac{x}{3} \quad (2);$$

$$\cos 2\omega t = -\frac{y}{4} \quad (3).$$

Из (2) и (3) получим

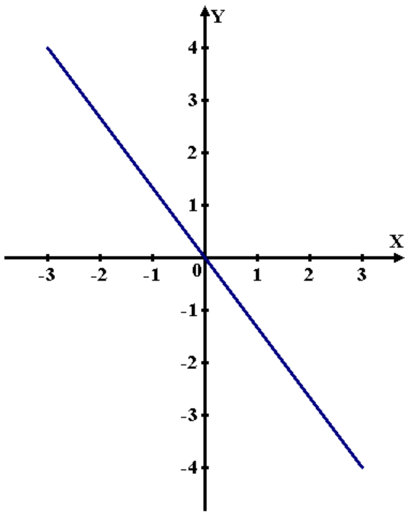
$$\frac{x}{3} = -\frac{y}{4};$$

$$y = -\frac{4}{3}x.$$

Из уравнений движения видно, что максимальные и минимальные значения достигаются соответственно при $\cos 2\omega t = 1$ и $\cos 2\omega t = -1$:

$$y_{\min}(3) = -4;$$

$$y_{\max}(-3) = 4.$$



Ответ: $y = -4x/3$.

Задача №6.9

Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти формулу наиболее вероятной скорости υВ. Ответ: $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$.

Решение:

Дано:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

$v_в - ?$

Значение наиболее вероятной скорости можно найти, продифференцировав выражение по аргументу *v*, приравняв результат нулю и используя условие для максимума выражения $f(v)$.

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{d}{dv}\left(4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\right) = 8\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v\left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT}\right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0$$

Значение *v*, при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая $v_в$:

$$1 - \frac{m_0 v_в^2}{2kT} = 0;$$

$$\frac{m_0 v_в^2}{2kT} = 1;$$

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Ответ: $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$.

Задача №6.14

На какой высоте плотность воздуха в *e* раз (*e* - основание натуральных логарифмов) меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считать не зависящими от высоты. Ответ: 7,98 *км*.

Решение:

Дано:
$\frac{\rho_0}{\rho} = e$
$g = const$
$T = const$
$h_0 = 0$
$h - ?$

Воспользуемся барометрическим уравнением

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg(h-h_0)}{RT}} \quad (1).$$

Считая воздух идеальным газом, воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad (2).$$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3).$$

Перепишем (2), используя (3)

$$p = \frac{\rho}{M}RT \quad (4).$$

Так как $T = const$, то

$$p_0 = \frac{\rho_0}{M}RT \quad (5).$$

Перепишем (1), учитывая (4) и (5)

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{Mg(h-h_0)}{RT}};$$

$$e^{\frac{Mg(h-h_0)}{RT}} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (6).$$

Учитывая данные, (6) примет вид

$$e^{\frac{Mg(h-h_0)}{RT}} = e;$$

$$\frac{Mg(h-h_0)}{RT} = 1;$$

$$h = \frac{RT}{Mg} + h_0 \quad (7).$$

Подставим в (7) данные и табличные значения: $T = 273K$, $M = 0{,}029\frac{кг}{моль}$:

$$h = \frac{8{,}31\frac{Дж}{моль\cdot K}\cdot 273K}{0{,}029\frac{кг}{моль}\cdot 9{,}8\frac{м}{с^2}} + 0 \approx 7{,}983 м \approx 7{,}98 км.$$

Ответ: 7,98 *км*.

Задача №6.18

Средняя длина свободного пробега <*l*> молекул водорода при нормальных условиях составляет 0,1 *мкм*. Определить среднюю длину их свободного пробега при давлении 0,1 *мПа*, если температура газа остается постоянной. Ответ: 101 *м*.

Решение:

Дано:	СИ:
$\langle l_0 \rangle = 0{,}1 мкм$	10^{-7} *м*
$p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5\ Па$	
$p = 0{,}1 \cdot мПа$	10^{-4} *Па*
$T = const$	
$\langle l \rangle - ?$	

Средняя длина свободного пробега вычисляется по формуле

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \quad (1).$$

Применим основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$p = nkT \quad (2).$$

Выразим *n* из (2):

$$n = \frac{p}{kT} \quad (3).$$

Подставим (3) в (1):

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma \frac{p}{kT}} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p} \quad (4).$$

Запишем (4) для нормальных условий:

$$\langle l_0 \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p_0} \quad (5).$$

Выразим σ из (5):

$$\sigma = \frac{kT}{\sqrt{2} p_0 \langle l_0 \rangle} \quad (6).$$

Подставим (6) в (4):

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \frac{kT}{\sqrt{2} p_0 \langle l_0 \rangle} p} = \frac{p_0 \langle l_0 \rangle}{p} \quad (7).$$

Подставим в (7) численные значения:

$$\langle l \rangle = \frac{1{,}01 \cdot 10^5\ Па \cdot 10^{-7}\ м}{10^{-4}\ Па} = 101 м.$$

Ответ: 101 *м*.

Задача №7.9

Кислород массой 32 *г* находится в закрытом сосуде под давлением 0,1 *МПа* при температуре 290 *К*. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определить: 1) объем сосуда; 2) температуру, до которой газ нагрели; 3) количество теплоты, сообщенное газу. Ответ: 1) $2{,}4\cdot10^{-2}$ *м*^{3}; 2) 1,16 *кК*; 3) 18,1 *кДж*.

Решение:

Дано:	СИ:
$m = 32\,г$	$0{,}032\,кг$
$p_1 = 0{,}1 МПа$	$10^5\,Па$
$T_1 = 290\,К$	
$p_2 = 4p_1$	
$V - ?$	
$T_2 - ?$	
$Q - ?$	

Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, считая кислород идеальным газом:

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1 \ (1).$$

Выразим V из (1):

$$V = \frac{mRT_1}{Mp_1} \ (2).$$

По табличным данным: $M = 0{,}032 \frac{кг}{моль}$.

Подставим численные значения в (2):

$$V = \frac{0{,}032\,кг \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{кг \cdot моль} \cdot 290\,К}{0{,}032 \frac{кг}{моль} \cdot 10^5\,Па} = 0{,}0241 м^3 \approx 2{,}4 \cdot 10^{-2}\,м^3.$$

По закону Шарля

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};$$

$$T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1} = \frac{4 p_1 T_1}{p_1} = 4T_1 \ (3).$$

Подставим численные значения в (3):

$$T_2 = 4 \cdot 290\,К = 1160\,К = 1{,}16 кК.$$

Первое начало термодинамики при изохорном процессе ($A = 0$):

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_v \Delta T \ (4), \text{ где}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 4T_1 - T_1 = 3T_1 \ (5),$$

$$C_v = \frac{i}{2} R \ (6).$$

Подставим (5) и (6) в (4):

$$Q = \frac{3im}{2M} C_v T_1 \ (7).$$

Для двухатомной жесткой молекулы $i = i_{пост} + i_{вр} = 3 + 2 = 5$.

Подставим численные значения в (7):

$$Q = \frac{3 \cdot 5 \cdot 0{,}032 кг}{0{,}032 \frac{кг}{моль}} \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 290 К \approx 18074\,Дж \approx 18{,}1 кДж.$$

Ответ: 1) $2{,}4\cdot10^{-2}$ *м*^{3}; 2) 1,16 *кК*; 3) 18,1 *кДж*.

Задача №7.17

Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре T = 300 K и под давлением P_1 = 0,5 $МПа$. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = -432$ $кДж$. Определить: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа. Ответ: 2) 1,25 $м^3/кг$.

Решение:

Дано:	СИ:
$m = 1 кг$	
$T = 300\,K$	
$T = const$	
$p_1 = 0{,}5 МПа$	10^5 $Па$
$p_2 = 2p_1$	
$A = -432 кДж$	$-4{,}32 \cdot 10^5$ $Дж$
$M - ?$	
$\frac{1}{\rho_1} - ?$	

По закону Бойля-Мариотта

$$p_1V_1 = p_2V_2 = pV \quad (1).$$

Работа газа определяется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (2).$$

Используя (1) и (2), получим:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1}{V} dV = p_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad (3).$$

Запишем уравнение состояния идеального газа для обоих состояний и выразим из них V_1 и V_2:

$$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT \quad (4),\quad V_1 = \frac{m}{Mp_1}RT \quad (5);$$

$$p_2V_2 = \frac{m}{M}RT \quad (6),\quad V_2 = \frac{m}{Mp_2}RT \quad (7).$$

Подставляя (5) и (7) в (3), получим

$$A = p_1V_1 \ln\frac{p_1}{p_2} \quad (8).$$

Выразим V_1 из (8):

$$V_1 = \frac{A}{p_1 \ln\frac{p_1}{p_2}} \quad (9).$$

Подставим (9) в (4):

$$p_1 \frac{A}{p_1 \ln\frac{p_1}{p_2}} = \frac{m}{M}RT;$$

$$M = \frac{mRT}{A}\ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{mRT}{A}\ln\frac{p_1}{2p_1} = -\frac{mRT}{A}\ln 2 \quad (10).$$

Подставим в (10) численные значения:

$$M = -\frac{1 кг \cdot 8{,}31\frac{Дж}{моль \cdot K} \cdot 300\,K}{-4{,}32 \cdot 10^5\,Дж}\ln 2 = 0{,}004\frac{кг}{моль}.$$

Сравнивая значение молярной массы с табличным, выясняем, что искомым газом является гелий.

Используя (4) и формулу $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$, получим:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{M}RT;$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{RT}{p_1 M} \quad (11).$$

Подставим (10) в (11):

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{RT}{p_1\left(-\frac{mRT}{A}\ln 2\right)} = -\frac{A}{mp_1 \ln 2} \quad (12).$$

Подставим в (12) численные значения:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{-4{,}32\ \text{Дж}}{1\text{кг} \cdot 5 \cdot 10^5\ \text{Па} \cdot \ln 2} \approx 1{,}25 \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \quad (12).$$

Ответ: 1) Гелий; 2) 1,25 $м^3/кг$.

Задача №7.28

Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70% количества теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 *кДж*. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле. Ответ: 1) 30%; 2) 1,5 *кДж*.

Решение:

Дано:	СИ:
$Q_x = 0{,}7Q_н$	
$Q_н = 5\,кДж$	$5 \cdot 10^3\ Дж$
$\eta - ?$	
$A - ?$	

КПД теплового двигателя определяется по формуле

$$\eta = \frac{Q_н - Q_x}{Q_н} \quad (1).$$

Подставим данные в (1):

$$\eta = \frac{Q_н - 0{,}7Q_н}{Q_н} = 0{,}3 = 30\%\,.$$

Работу, совершенную тепловым двигателем находим по формуле

$$A = Q_н - Q_x \quad (2).$$

Учитывая, данные получим

$$A = Q_н - 0{,}7Q_н = 0{,}3Q_н \quad (3).$$

Подставим в (3) численное значение:

$$A = 0{,}3 \cdot 5 \cdot 10^3\ Дж = 1{,}5\,кДж\,.$$

Ответ: 1) 30%; 2) 1,5 *кДж*.

Задача №8.9

Кислород (ν = 1 *моль*) (реальный газ), занимавший при T_1 = 400 *К* объем V_1 = 1 *л*, расширяется изотермически до $V_2 = 2V_1$. Определить: 1) работу при расширении; 2) изменение внутренней энергии газа. Поправки *a* и *b* принять равными соответственно 0,136 *Н·м*^{4}/*моль*^{2} и 3,17·10^{-5} *м*^{3}/*моль*. Ответ: 1) 2,29 *кДж*; 2) 68 *Дж*.

Решение:

Дано:	СИ:
$\nu = 1\,моль$	
$M = 0{,}032\,\dfrac{кг}{моль}$	
$T_1 = 400\,К$	
$V_1 = 1\,л$	$10^{-3}\,м^3$
$V_2 = 2V_1$	
$a = 0{,}136\,\dfrac{Н\cdot м^4}{моль^2}$	
$b = 3{,}17\cdot 10^{5}\,\dfrac{м^3}{моль}$	
$A - ?$	
$\Delta U - ?$	

Кинетическая энергия теплового движения молекул не изменяется, так как $T_1 = const$. Значит, внутренняя энергия изменяется только за счет изменения потенциальной энергии взаимодействия межмолекулярных сил:

$$\Delta U = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a\nu^2}{V^2}dV = -\left.\frac{a\nu^2}{V}\right|_{V_1}^{V_2} = -\left(\frac{a\nu^2}{V_2} - \frac{a\nu^2}{V_1}\right) = \\ = a\nu^2\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \frac{a\nu^2(V_2 - V_1)}{V_1V_2} \quad (1).$$

Подставляя в (1) $V_2 = 2V_1$, получим

$$\Delta U = \frac{a\nu^2(2V_1 - V_1)}{2V_1V_1} = \frac{a\nu^2}{2V_1} \quad (2).$$

Подставим в (2) численные значения:

$$\Delta U = \frac{0{,}136\dfrac{Н\cdot м^4}{моль^2}\cdot(1\,моль)^2}{2\cdot 10^{-3}\,м} = 68\,Дж.$$

Работа газа вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (3).$$

Воспользуемся уравнением Ван дер Ваальса

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT \quad (4).$$

Выразим *p* из (4):

$$p + \frac{a\nu^2}{V^2} = \frac{RT}{\dfrac{V}{\nu} - b};$$

$$p = \frac{RT}{\dfrac{V}{\nu} - b} - \frac{a\nu^2}{V^2} \quad (5).$$

Подставим (5) в (3):

$$A = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{RT}{\dfrac{V}{\nu} - b} - \frac{a\nu^2}{V^2}\right)dV = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{a\nu^2}{V^2}\right)dV = \nu RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V - \nu b} - a\nu^2\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2} = \\ = \nu RT\ln\frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} + \left(\frac{a\nu^2}{V_2} - \frac{a\nu^2}{V_1}\right) \quad (6).$$

Подставляя в (6) $V_2 = 2V_1$, получим

$$A = \nu RT \ln \frac{2V_1 - \nu b}{V_1 - \nu b} + \frac{a\nu^2}{2V_1} \quad (7).$$

Подставим в (7) численные значения:

$$A = 1\,моль \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot K} \cdot 400\,K \cdot \ln \frac{2 \cdot 10^{-3}\,м^3 - 1\,моль \cdot 3{,}17 \cdot 10^5\,\frac{м^3}{моль}}{10^{-3}\,м^3 - 1\,моль \cdot 3{,}17 \cdot 10^5\,\frac{м^3}{моль}} + .$$

$$+ \frac{0{,}136\,\frac{H \cdot м^4}{моль^2} \cdot (1\,моль)^2}{2 \cdot 10^{-3}\,м} \approx 2290\,Дж = 2{,}29\,кДж.$$

Ответ: 1) 2,29 *кДж*; 2) 68 *Дж*.