Тема 1. Электростатика

Задача №1.11

Определить поверхностную плотность заряда, создающего вблизи поверхности Земли напряженность *E* = 200 *В/м*. Ответ: 1,77 *нКл/м*^{2}.

Решение:

Дано:

$E = 200\dfrac{В}{м}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\dfrac{Ф}{м}$

$\sigma - ?$

Для воздуха $\varepsilon \approx 1$.

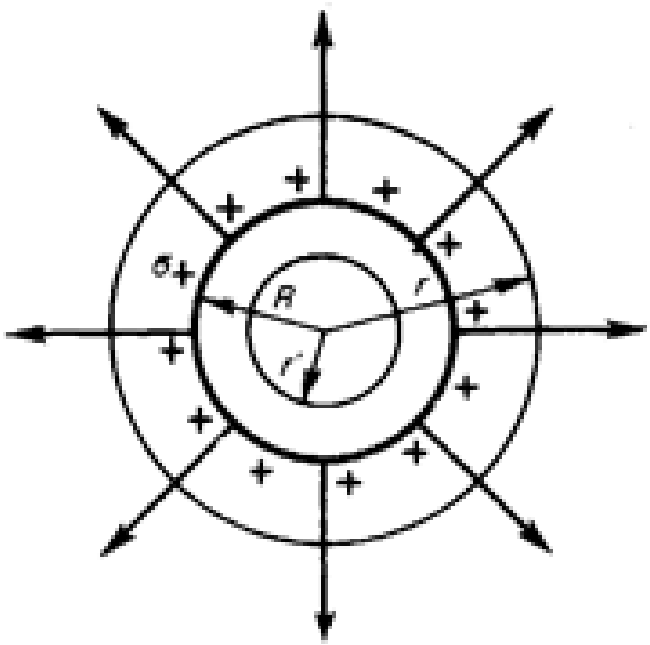
Допустим, поверхность Земли радиуса *R* и общим зарядом *Q* заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ_+. Тогда

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} \text{ (1).}$$

Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности, поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально.

Построим мысленно сферу радиуса *r*, имеющую общий центр с заряженной сферой. Если $r \ge R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд *Q*, создающий рассматриваемое поле, и по теореме Гаусса

$$Ф_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{k} Q_i;$$



Так как нормаль к поверхности Земли $\vec{n} \perp \vec{E}$, то

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0};$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ (2).}$$

Из (1) и (2) получим

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$\sigma = E\varepsilon_0.$$

Очевидно, внутри сферической поверхности ($r' < R$) поле отсутствует.

Вычислим *σ*:

$$\sigma = 200\frac{В}{м} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{Ф}{м} = 1{,}77\frac{нКл}{м^2}.$$

Ответ: $1{,}77\dfrac{нКл}{м^2}$.

Задача №1.29

Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, заряженной равномерно с поверхностной плотностью σ = 5 *нКл/м*². Определить числовое значение и направление градиента потенциала этого поля. Ответ: 282 *В/м*.

Решение:

Дано:	СИ:
$\sigma = 5\dfrac{нКл}{м^2}$	$5\cdot10^{-9}\dfrac{Кл}{м^2}$
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\dfrac{Ф}{м}$	
$grad\varphi - ?$	

По определению

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad (1).$$

Значит,

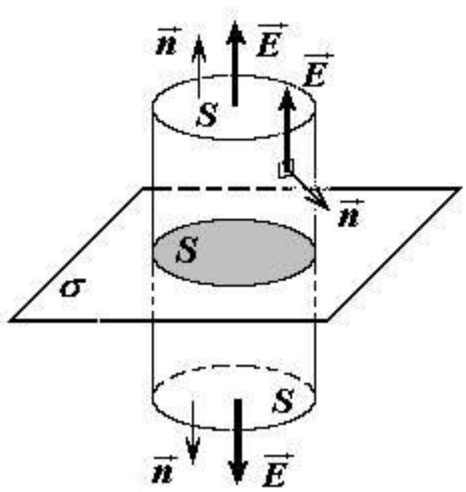
$$grad\varphi = -\vec{E} \quad (2),$$

т.е. $grad\varphi$ численно равен и противоположно направлен вектору напряженности $\vec{E}$.

Определим напряженность заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью σ_+. Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей. Так как образующие цилиндра параллельны линиям $\vec{E}$, то поток вектора $\vec{E}$ сквозь боковую поверхность цилиндра равен 0, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания (площади оснований равны и для основания E_n совпадает с E), т.е. $Ф_E = 2ES$.

Заряд заключенный внутри цилиндрической поверхности

$$Q = \sigma S.$$



Согласно Теореме Гаусса

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S;$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (1).$$

Значит, $|grad\varphi| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Вычислим $|grad\varphi|$:

$$|grad\varphi| = \frac{5\cdot10^{-9}\dfrac{Кл}{м^2}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\dfrac{Ф}{м}} = 282\frac{В}{м}.$$

Ответ: $282\dfrac{В}{м}$.

Задача №1.48

Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 5$ *мм*, разность потенциалов $U = 1{,}2$ *кВ*. Определить: 1) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектрике, если известно, что диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами, $\chi = 1$. Ответ: 1) 4,24 *мкКл/м*^{2}; 2) 2,12 *мкКл/м*^{2}.

Решение:

Дано:	СИ:
$d = 5\,мм$	$5\cdot10^{-3}\ м$
$U = 1{,}2\,кВ$	$1{,}2\cdot10^{3}\ В$
$\chi = 1$	
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\dfrac{Ф}{м}$	
1) $\sigma - ?$	
2) $\sigma' - ?$	

Запишем формулу (1) из задачи №1.29 для одной пластины с учетом диэлектрической проницаемости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad (1).$$

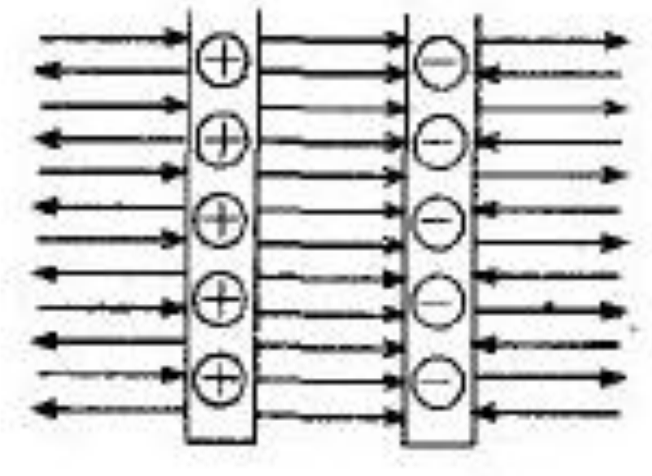
Конденсатор состоит из двух пластин, заряженных разноименно, но одинаково по модулю, с поверхностными плотностями σ_+ и σ_-. Между обкладками напряженности каждой из обкладок равны и направлены одинаково. По принципу суперпозиции полей напряженность между обкладками

$$E_+ + E_- = 2\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (2).$$

Вне пластин напряженности каждой из пластин взаимно компенсируют друг друга, т.е. $E = 0$.

Диэлектрическая проницаемость ε и диэлектрическая восприимчивость (поляризуемость) χ связаны выражением

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (3).$$



Подставим (3) в (2):

$$E = \frac{\sigma}{(1+\chi)\varepsilon_0} \quad (4).$$

С другой стороны

$$E = \frac{U}{d} \quad (5).$$

Из (4) и (5) получим

$$\frac{\sigma}{(1+\chi)\varepsilon_0} = \frac{U}{d};$$

$$\sigma = \frac{(1+\chi)U\varepsilon_0}{d} \quad (6).$$

Вычислим σ:

$$\sigma = \frac{(1+1)\cdot 1{,}2\cdot 10^{3}\ В\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}}{5\cdot 10^{-3}\ м} \approx 4{,}25\cdot 10^{-6}\ \frac{Кл}{м^{2}} = 4{,}25\,\frac{мкКл}{м^{2}}.$$

Найдем поверхностную плотность связанных (поляризационных) зарядов σ' из выражения

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0};$$

$$\sigma' = E'\varepsilon_0 \ (7).$$

Напряженность связанных зарядов E' определяется из выражения

$$E = E_0 + E';$$

$$E' = E_0 - E \ (8),$$

где E_0 - напряженность поля между обкладками конденсатора в вакууме:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ (9).$$

Подставим (4), (7) и (9) в (8):

$$\frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{(1+\chi)\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{1+\chi}\right);$$

$$\sigma' = \sigma\frac{\chi}{1+\chi} \ (10).$$

Подставим (6) в (10):

$$\sigma' = \frac{(1+\chi)U\varepsilon_0}{d}\cdot\frac{\chi}{1+\chi} = \frac{\chi U\varepsilon_0}{d}.$$

Вычислим σ':

$$\sigma' = \frac{1\cdot 1{,}2\cdot 10^{3}\ В\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}}{5\cdot 10^{3}\ м} \approx 2{,}12\cdot 10^{-6}\ \frac{Кл}{м^{2}} = 2{,}12\,\frac{мкКл}{м^{2}}.$$

Ответ: $4{,}25\,\frac{мкКл}{м^{2}}$; $2{,}12\,\frac{мкКл}{м^{2}}$.

Задача №1.67

К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500\ В$. Площадь пластин $S = 200\ см^2$, расстояние между ними $d_1 = 1{,}5\ мм$. Пластины раздвинули до расстояния $d_2 = 15\ мм$. Найти энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) отключался; 2) не отключался. Ответ: 1) $W_1 = 14{,}8\ мкДж$, $W_2 = 148\ мкДж$; 2) $W_1 = 14{,}8\ мкДж$; $W_2 = 1{,}48\ мкДж$.

Решение:

Дано:	СИ:
$U_1 = 500\,В$	
$S = 200\ см^2$	$2\cdot 10^{-2}\ м^2$
$d_1 = 1{,}5\ мм$	$1{,}5\cdot 10^{-3}\ м$
$d_2 = 15\ мм$	$1{,}5\cdot 10^{-2}\ м$
1) $Q = const$	
2) $U = const$	
1) $W_1 - ?\ W_1' - ?$	
2) $W_2 - ?\ W_2' - ?$	

Введем обозначения: без штриха опишем состояние системы до раздвижения обкладок, со штрихом – после раздвижения; индексом 1 – состояние $Q = const$, индексом 2 – состояние $U = const$.

Для воздушного конденсатора $\varepsilon = 1$.

Энергия конденсатора до раздвижения обкладок в случае отключения ($Q = const$) и не отключения ($U = const$) одинакова и определяется по формуле

$$W_1 = W_2 = \frac{C_1 U_1^2}{2}\ (1),\ где$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}\ (2)$$ – емкость конденсатора до раздвижения обкладок.

Подставим (2) в (1):

$$W_1 = W_2 = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2 d_1}\ (3).$$

Вычислим W_1 и W_2:

$$W_1 = W_2 = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}\cdot 2\cdot 10^{-2}\ м^2\cdot \left(5\cdot 10^2\ В\right)^2}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\ м} \approx 14{,}8\,мкДж.$$

Определим энергию конденсатора W_1' после раздвижения обкладок в случае отключения ($Q = const$) от источника питания. При этом изменится напряжение и емкость конденсатора, т.е.

$$W_1' = \frac{C_2 U_2^2}{2}\ (4).$$

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 = Q = const\ (5);$$

$$U_2 = \frac{C_1 U_1}{C_2}\ (6).$$

Подставим (6) в (4):

$$W_1' = \frac{C_2\left(\dfrac{C_1U_1}{C_2}\right)^2}{2} = \frac{C_1^2U_1^2}{2C_2} \text{ (7).}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \text{ (8).}$$

Подставим (2) и (8) в (7):

$$W_1' = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1}\right)^2 U_1^2}{2\cdot\dfrac{\varepsilon_0 S}{d_2}} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2 d_2}{2d_1^2} \text{ (9).}$$

Вычислим W_1':

$$W_1' = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\,\dfrac{\textit{Ф}}{\textit{м}}\cdot 2\cdot10^{-2}\,\textit{м}^2\cdot\left(5\cdot10^2\,\textit{В}\right)^2\cdot1{,}5\cdot10^{-2}\,\textit{м}}{2\cdot\left(1{,}5\cdot10^{-3}\,\textit{м}\right)^2} \approx 148\,\textit{мкДж}.$$

Определим энергию конденсатора W_2' после раздвижения обкладок в случае не отключения ($U = const$) от источника питания. При этом изменится заряд и емкость конденсатора, т.е.

$$W_2' = \frac{C_2U_1^2}{2} \text{ (10).}$$

Подставим (8) в (10):

$$W_2' = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d_2}U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_2}.$$

Вычислим W_2':

$$W_2' = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\,\dfrac{\textit{Ф}}{\textit{м}}\cdot 2\cdot10^{-2}\,\textit{м}^2\cdot\left(5\cdot10^2\,\textit{В}\right)^2}{2\cdot1{,}5\cdot10^{-2}\,\textit{м}} \approx 1{,}48\,\textit{мкДж}.$$

Ответ: 1) 14,8 *мкДж*, 148 *мкДж*;
2) 14,8 *мкДж*, 1,48 *мкДж*.

Тема 2. Постоянный электрический ток

Задача №2.4

Определить суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной L = 500 *м*, по которому течет ток I = 20 *А*. Ответ: $5{,}69 \cdot 10^{-8}\ кг \cdot \frac{м}{с}$.

Решение:

Дано:	
$L = 500\ м$	
$I = 20\ A$	
$p - ?$	

Допустим, все электроны движутся равномерно со средней скоростью v. Импульс всех электронов проводника определяется по формуле

$$p = Nm_0 v \text{ (1), где}$$

N – количество электронов,

m_0 - масса одного электрона.

С учетом равномерности движения получим

$$v = \frac{L}{t} \text{ (2).}$$

Из (1) и (2) получим

$$p = \frac{Nm_0 L}{t} \text{ (3).}$$

По определению

$$I = \frac{Q}{t} \text{ (4).}$$

Допустим, носителями заряда являются только электроны, т.е. $Q = Ne$. Тогда (4) запишется так

$$I = \frac{Ne}{t} \text{ (5).}$$

Выразим из (5) $\frac{N}{t}$ и подставим в (3):

$$p = \frac{I\, m_0 L}{e} \text{ (6).}$$

Вычислим p:

$$p = \frac{20\ A \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ кг \cdot 500\ м}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл} \approx 5{,}69 \cdot 10^{-8}\ кг \cdot \frac{м}{с}.$$

Ответ: $5{,}69 \cdot 10^{-8}\ кг \cdot \frac{м}{с}$.

Задача №2.16

Определить: 1) э. д. с E; 2) внутреннее сопротивление R источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 A развивается мощность 10 Bm, а при силе тока 2 A мощность 8 Bm. Ответ: 1) E = 5,5 B; 2) R = 0,75 $Ом$.

Решение:

Дано:
$I_1 = 4\,A$
$W_1 = 10\,Bm$
$I_2 = 2\,A$
$W_2 = 8\,Bm$
$E - ?$
$r - ?$

Запишем закон Ома для полной цепи для каждого случая:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r} \Rightarrow E = I_1 R_1 + I_1 r \ (1),$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + r} \Rightarrow E = I_2 R_2 + I_2 r \ (2).$$

Мощность во внешней цепи для каждого случая:

$$W_1 = I_1^2 R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{W_1}{I_1^2} \ (3),$$

$$W_2 = I_2^2 R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{W_2}{I_2^2} \ (4).$$

Подставим (3) и (4) соответственно в (1) и (2):

$$E = I_1 \frac{W_1}{I_1^2} + I_1 r \Rightarrow E = \frac{W_1}{I_1} + I_1 r \ (5),$$

$$E = I_2 \frac{W_2}{I_2^2} + I_2 r \Rightarrow E = \frac{W_2}{I_2} + I_2 r \ (6).$$

Решим совместно (5) и (6):

$$\frac{W_1}{I_1} + I_1 r = \frac{W_2}{I_2} + I_2 r;\ (I_1 - I_2) r = \frac{W_2}{I_2} - \frac{W_1}{I_1};\ r = \frac{\frac{W_2}{I_2} - \frac{W_1}{I_1}}{I_1 - I_2},$$

$$r = \frac{W_2 I_1 - W_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} \ (7).$$

Подставим (7), например, в выражение (5):

$$E = \frac{W_1}{I_1} + I_1 \frac{W_2 I_1 - W_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = \frac{W_1 I_2 (I_1 - I_2) + W_2 I_1^2 - W_1 I_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = \frac{W_2 I_1^2 - W_1 I_2^2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)}.$$

Вычислим r и E:

$$r = \frac{8\,Bm \cdot 4\,A - 10\,Bm \cdot 2\,A}{4A \cdot 2A (4A - 2A)} = 0{,}75\,\underline{Ом}.$$

$$E = \frac{8\,Bm \cdot (4\,A)^2 - 10\,Bm \cdot (2\,A)^2}{4A \cdot 2A (4A - 2A)} = 5{,}5\,B$$

Ответ: 1) 5,5 B; 0,75 <u>Ом</u>.

Тема 3. Электрические токи в металлах, в вакууме и газах

Задача №3.4

Ток насыщения при несамостоятельном разряде $I_{нас} = 6{,}4\ nA$. Найти число пар ионов, создаваемых в 1 *с* внешним ионизатором. Ответ: $2\cdot 10^7$.

Решение:

Дано:	СИ:
$I_{нас} = 6{,}4\, nA$	$6{,}4\cdot 10^{-12}\ A$
$t = 1c$	
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл$	
$N - ?$	

При ионизации возникает пара положительно и отрицательно заряженных частиц. Оба вида заряда участвуют в возникновении тока:

$$2Ne = I_{нас}t \Rightarrow N = \frac{I_{нас}t}{2e}.$$

Вычислим N:

$$N = \frac{6{,}4\cdot 10^{-12}\ A\cdot 1c}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл} = 2\cdot 10^7.$$

Ответ: $2\cdot 10^7$.

Тема 4. Магнитное поле

Задача №4.11

Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка с магнитным моментом $p_m = 1{,}5\ A\cdot м^2$ равна $150\ A/м$. Определить: 1) радиус витка; 2) силу тока в витке. Ответ: 1) 11,7 *см*; 2) 35,1 *А*.

Решение:

Дано:
$p_m = 1{,}5\ A\cdot м^2$
$H = 150\ \frac{A}{м}$
$R - ?$
$I - ?$

Магнитный момент p_m контура с током I, имеющего произвольную форму

$$\vec{p}_m = I\int_S \vec{n}\, dS .$$

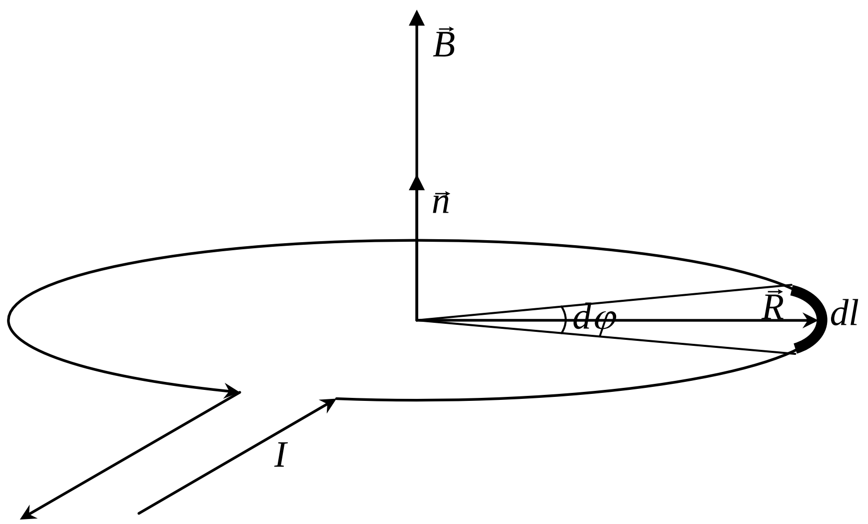
Учитывая, что контур плоский (все нормали имеют одинаковое направление) и круговой ($S = \pi R^2$), имеем:

$$p_m = \pi R^2 I \quad (1).$$

По определению $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0\mu}$ (2).

Применим закон Био-Савара-Лапласа для определения магнитной индукции в центре кругового витка

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{I}{R^3}\cdot\left[d\vec{l}\ \vec{R}\right].$$



Из рисунка видно, что $d\vec{l} \perp \vec{R}$. Значит, $\left[d\vec{l}\ \vec{R}\right] = R\cdot\vec{n}\cdot dl$, где $dl = Rd\varphi$.

Тогда магнитная индукция численно равна

$$B = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0\mu I}{4\pi R^3}R^2 d\varphi = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi R}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0\mu I\, 2\pi}{4\pi R} = \frac{\mu_0\mu I}{2R} \quad (3).$$

Подставляя (3) в (2) получим

$$H=\frac{\frac{\mu_0\mu I}{2R}}{\mu_0\mu}=\frac{I}{2R}\ (4).$$

Выразим из (4) I и подставим в (1):

$$p_m=\pi R^2\cdot H\cdot 2R=2\pi R^3 H\Rightarrow\ R=\sqrt[3]{\frac{p_m}{2\pi H}}\ (5).$$

Вычислим R:

$$R=\sqrt[3]{\frac{1{,}5\,\frac{A}{м^2}}{2\cdot 3{,}14\cdot 150\,\frac{A}{м}}}\approx 0{,}117\,м=11{,}7\,см.$$

Найдем I, используя (4) и (5):

$$I=2H\sqrt[3]{\frac{p_m}{2\pi H}}=\sqrt[3]{\frac{8H^3p_m}{2\pi H}}=\sqrt[3]{\frac{4H^2p_m}{\pi}}.$$

Вычислим I:

$$I=\sqrt[3]{\frac{4\cdot\left(150\,\frac{A}{м}\right)^2\cdot 1{,}5\,A\cdot м^2}{3{,}14}}\approx 35A.$$

Ответ: 11,7 *см*; 35 *А*.

Задача №4.32

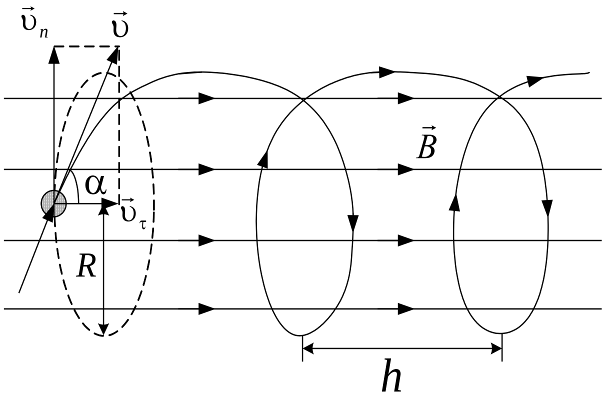
Электрон движется в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B = 0,2 *мТл* по винтовой линии. Определить скорость υ электрона, если радиус винтовой линии R = 3 *см*, а шаг h = 9 *см*. Ответ: 1,17 *Мм/с*.

Решение:

Дано:	СИ:
$B = 0{,}2\ мТл$	$2\cdot10^{-4}\ Тл$
$R = 3\ см$	$3\cdot10^{-2}\ м$
$H = 9\ см$	$9\cdot10^{-2}\ м$
$v - ?$	

На электрон, движущейся в магнитном поле, действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_л = q[\vec{v}\,\vec{B}]\ (1)$$



Очевидно, что $\vec{v}$ не перпендикулярен $\vec{B}$, так как электрон движется по винтовой линии. Обозначим угол между $\vec{v}$ и $\vec{B}$ через α. Движение электрона можно представить в виде суперпозиции равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью $v_\tau = v\cdot\cos\alpha$ и равномерного движения по окружности со скоростью $v_n = v\cdot\sin\alpha$. Тогда по второму закону Ньютона

$$F_л = ma\text{, где}$$

$$F_л = |q|v_n B,$$

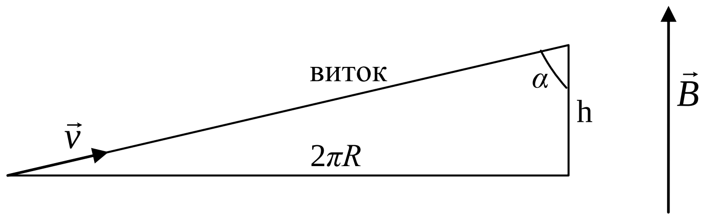
$$a = \frac{v_n^2}{R}.$$

Значит, $|q|v_n B = m\dfrac{v_n^2}{R}$ или $v_n = \dfrac{|q|BR}{m}$.

Учитывая, что $v_n = v\cdot\sin\alpha$ и $|q| = e$, получим

$$v = \frac{eBR}{m\sin\alpha}\ (2).$$

Если мысленно выпрямить один виток спирали, получим следующую картинку



Из треугольника видно, что $tg\alpha = \dfrac{2\pi R}{h}$. По формуле $\sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}$ из тригонометрии представим $\sin\alpha$ через $tg\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\pi R}{h}}{\sqrt{\left(\dfrac{2\pi R}{h}\right)^2 + 1}} = \frac{\dfrac{2\pi R}{h}}{\sqrt{\dfrac{4\pi^2 R^2 + h^2}{h^2}}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}} \quad (3).$$

Подставим (3) в (2):

$$v = \frac{e\,B\,R}{m\dfrac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}} = \frac{e\,B\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}{2\,\pi\,m}.$$

Вычислим *v*:

$$v = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\cdot 2\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}\cdot\sqrt{4\cdot 3{,}14^2\cdot\left(3\cdot 10^{-2}\ \text{м}\right)^2 + \left(9\cdot 10^{-2}\ \text{м}\right)^2}}{2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг}} \approx$$

$$\approx 1{,}17\cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1{,}17\ \frac{\text{Мм}}{\text{с}}.$$

Ответ: $1{,}17\ \dfrac{\text{Мм}}{\text{с}}$.

Задача №4.51

В однородное магнитное поле напряженностью $H = 100$ *кА/м* помещена квадратная рамка со стороной $d = 10$ *см*. Плоскость рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 60°$. Определить магнитный поток, пронизывающий рамку. Ответ: 628 *мкВб*.

Решение:

Дано:	СИ:
$H = 100\,\dfrac{кА}{м}$	$10^5\,\dfrac{А}{м}$
$d = 10\,см$	$0{,}1\,м$
$\alpha = 60°$	
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\dfrac{Гн}{м}$	
$\Phi - ?$	

По определению

$$\Phi = \int_S B_n dS \quad (1), \text{ где}$$

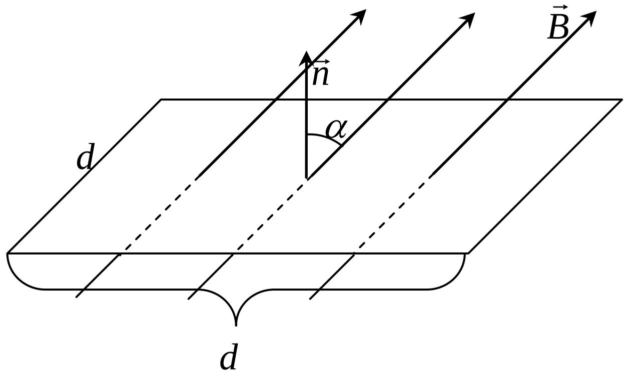
$$B_n = B \cdot \cos\alpha \quad (2).$$

Подставим (2) в (1):

$$\Phi = \int_S B \cdot \cos\alpha \, dS \quad (3).$$

Учитывая, что поле однородно, $B = \mu_0 H$, $S = d^2$ и допуская, что $\mu = 1$, получим

$$\Phi = \mu_0 H d^2 \cos\alpha .$$



Вычислим Ф:

$$\Phi = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}\,\frac{Ф}{м} \cdot 10^5\,\frac{А}{м} \cdot (0{,}1\,м)^2 \cos 60° \approx 6{,}28 \cdot 10^{-4}\,Вб = 628\,мкВб .$$

Ответ: 628 *мкВб*.

Тема 5. Электромагнитная индукция

Задача №5.11

Магнитная индукция *B* поля между полюсами двухполюсного генератора равна 1 *Тл*. Ротор имеет 140 *витков* (площадь каждого витка $S = 500$ *см*^{2}). Определить частоту вращения якоря, если максимальное значение э. д. с. индукции равно 220 *В*. Ответ: 5 *с*$^{-1}$.

Решение:

Дано:	СИ:	
$B = 1\,Тл$		По закону Фарадея $$\mathrm{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} \text{ (1)},$$
$N = 140$		
$S = 500\,см^2$	$5 \cdot 10^{-2}\ м^2$	где $\Psi = N\Phi$ - потокосцепление контура.
$\mathrm{E}_{im} = 220\,В$		Подставим (2) в (1): $$\mathrm{E}_i = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt} \text{ (3)}.$$
$\nu - ?$		

Магнитный поток Ф при вращении якоря изменяется по гармоническому закону

$$\Phi = BS\cos(\omega t + \varphi_0) \text{ (4)}.$$

Подставим (4) в (3):

$$\mathrm{E}_i = -N\frac{d\left(BS\cos(\omega t + \varphi_0)\right)}{dt} = NBS\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальная э. д. с. индукции достигается, когда $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$, т.е.

$$\mathrm{E}_{i\,m} = NBS\omega \text{ (5)}.$$

По определению $\omega = 2\pi\nu$ (6).

Подставим (6) в (5) и выразим ν:

$$\mathrm{E}_{i\,m} = 2\pi\nu NBS;$$

$$\nu = \frac{\mathrm{E}_{i\,m}}{2\pi NBS}.$$

Вычислим *ν*:

$$\nu = \frac{220\,В}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 140 \cdot 1\,Тл \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ м^2} \approx 5\,с^{-1}.$$

Ответ: $5\,с^{-1}$.

Задача №5.28

Два соленоида $L_1 = 0{,}64$ Гн, $L_2 = 1$ Гн одинаковой длины и равного сечения вставлены один в другой. Определить взаимную индуктивность соленоидов. Ответ: 0,8 Гн.

Решение:

Дано:	
$L_1 = 0{,}6\,Гн$	
$L_2 = 1\,Гн$	
$S_1 = S_2 = S$	
$l_1 = l_2 = l$	
$M - ?$	

Очевидно, что соленоиды отличаются количеством витков. Взаимная индуктивность двух соленоидов при равном сечении и длине определяется по формуле

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} \quad (1).$$

Индуктивность каждой катушки определяется по формуле

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} \quad (2),$$

Аналогично для второй катушки

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l} \quad (3).$$

Разделим выражение (2) на (3) и преобразуем:

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2;$$

$$N_1 = N_2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (4).$$

Подставим (4) в (1):

$$M = \frac{\mu_0 N_2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\, N_2 S}{l} = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (5).$$

С учетом (3) выражение (5) примет вид:

$$M = L_2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{L_1 L_2}\,.$$

Вычислим M:

$M = \sqrt{0{,}64\,Гн \cdot 1\,Гн} = 0{,}8\,Гн$.

Ответ: 0,8 $Гн$.

Тема 6. Магнитные свойства вещества

Задача №6.8

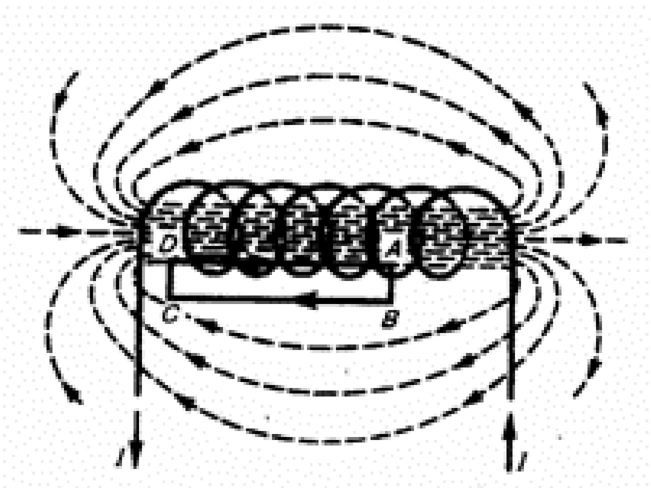
Соленоид, находящийся в диамагнитной среде, имеет длину l = 30 *см*, площадь поперечного сечения $S = 15$ *см*^{2} и число витков $N = 500$. Индуктивность соленоида L = 1,5 *Гн*, а сила тока, протекающего по нему, $I = 1$ *А*. Определить: 1) магнитную индукцию внутри соленоида; 2) намагниченность внутри соленоида. Ответ: 1) 2 *мТл*; 2) 75 *А/м*.

Решение:

Дано:	СИ:
$l = 30\,см$	0,3 м
$S = 15\,см^2$	$1{,}5\cdot10^{-3}\ м^2$
$N = 500$	
$L = 1{,}5\,мГн$	$1{,}5\cdot10^{-3}\ Гн$
$I = 1\,A$	
1) $B - ?$	
2) $J - ?$	

Для вычисления магнитной индукции B внутри соленоида, находящейся в диамагнитной среде, выберем замкнутый контур *ABCDA*, как показано на рисунке. Циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру *ABCDA*, который охватывает все N витков, используя формулу циркуляции вектора $\vec{B}$, будет

$$\oint\limits_{ABCDA} B_l dl = \mu_0\,\mu\,N\,I\,.$$



Интеграл по *ABCDA* можно разложить на четыре интеграла: по *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. На участках *AB* и *CD* контур и линии магнитной индукции перпендикулярны: $B_l = 0$. На участке *BC* вне соленоида $B = 0$. На участке *DA* циркуляция вектора $\vec{B}$ равна B_l (контур и линии магнитной индукции совпадают); значит,

$$\int\limits_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0\,\mu\,N\,I \quad (1).$$

Из (1) приходим к формуле магнитной индукции поля внутри соленоида:

$$B = \frac{\mu_0\,\mu\,N\,I}{l} \quad (2).$$

Индуктивность внутри соленоида

$$L = \frac{\mu_0\,\mu\,N^2\,S}{l} \quad (3).$$

Из (3) следует

$$\mu = \frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} \quad (4).$$

Подставим (4) в (2):

$$B = \frac{\mu_0 \dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S} N I}{l} = \frac{LI}{N S} \quad (5).$$

Вычислим *B*:

$$B = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\, Гн \cdot 1\, А}{500 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, м^2} = 2 \cdot 10^{-3}\, Тл = 2\, мТл.$$

Намагниченность внутри соленоида определяется по формуле

$$J = \chi H \quad (6),$$

где $\chi = \mu - 1$ (7) – магнитная восприимчивость вещества.

Магнитная индукция и напряженность связаны соотношением

$$H = \frac{B}{\mu \mu_0} \quad (8).$$

Подставим (7) и (8) в (6):

$$J = (\mu - 1) \frac{B}{\mu \mu_0} \quad (9).$$

Подставим (4) и (5) в (9):

$$J = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1 \right) \frac{\dfrac{LI}{N S}}{\dfrac{Ll}{\mu_0 N^2 S} \mu_0} = \frac{Ll - \mu_0 N^2 S}{\mu_0 N^2 S} \cdot \frac{IN}{l} = \frac{(Ll - \mu_0 N^2 S) I}{\mu_0 N S l}.$$

Вычислим *J*:

$$J = \frac{\left(1{,}5 \cdot 10^{-3}\, Гн \cdot 0{,}3\, м - 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}\, \dfrac{Гн}{м} \cdot 500^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, м^2 \right) \cdot 1\, А}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}\, \dfrac{Гн}{м} \cdot 500 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, м^2 \cdot 0{,}3\, м} \approx 75 \frac{А}{м}.$$

Ответ: 2 *мТл*, 75 *А/м*.

Тема 8. Электромагнитные колебания

Задача №8.11

Определить добротность Q колебательного контура, состоящего из катушки индуктивностью $L = 2$ *мГн*, конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ *мкФ* и резистора сопротивлением $R = 1$ *Ом*. Ответ: 100.

Решение:

Дано:	СИ:
$L = 2\,мГн$	$2\cdot 10^{-3}\,Гн$
$C = 0{,}2\,мкФ$	$2\cdot 10^{-7}\,Ф$
$R = 1\,Ом$	
$Q - ?$	

По определению

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t)-W(t+T)} \quad (1),$$

где $W(t)$ - энергия колебательного контура в момент времени t. К примеру, $W(t)$ определим по формуле

$$W(t) = \frac{LI^2(t)}{2} \quad (2),$$

где $I(t)$ - амплитудное значение силы тока в момент времени t.

$$I(t) = I_0\cdot e^{-\beta t} \quad (3),$$

где I_0 - начальное амплитудное значение силы тока, β – коэффициент затухания.

Подставим (3) в (2):

$$W(t) = \frac{L\left(I_0\cdot e^{-\beta t}\right)^2}{2} = \frac{LI_0^2\cdot e^{-2\beta t}}{2} \quad (4).$$

Подставим (4) в (1):

$$Q = 2\pi\frac{\dfrac{LI_0^2\cdot e^{-2\beta t}}{2}}{\dfrac{LI_0^2\cdot e^{-2\beta t}}{2} - \dfrac{LI_0^2\cdot e^{-2\beta(t+T)}}{2}} = \frac{2\pi e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta t}\cdot e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\beta T}} \quad (5).$$

Найдем значение $\beta T = \delta$ (логарифмический декремент затухания), если известно, что период затухающих колебаний определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1}} \quad (6).$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (7).$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ (8).$$

Подставим (7) и (8) в (6):

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{2L}}\right)^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}} \ (9).$$

Вычислим значение $\delta = \beta T$:

$$\delta = \frac{2 \cdot 3{,}14}{\sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\, Гн}{(1Ом)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-7}\, Ф} - 1}} \approx 0{,}03.$$

Видно, что $\delta << 1$. Тогда из следствия второго замечательного предела следует

$$1 - e^{-2\beta T} \sim 2\delta \ (10).$$

Перепишем (5), воспользовавшись (10)

$$Q = \frac{2\pi}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta} \ (11).$$

Перепишем (9) с учетом того, что

$$\frac{4L}{R^2C} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\, Гн}{(1Ом)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-7}\, Ф} = 40000 >> 1.$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C}}} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} \ (12).$$

Подставим (12) в (11):

$$Q = \frac{\pi}{\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Вычислим Q:

$$Q = \frac{1}{1Ом}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}\, Гн}{2 \cdot 10^{-7}\, Ф}} = 100.$$

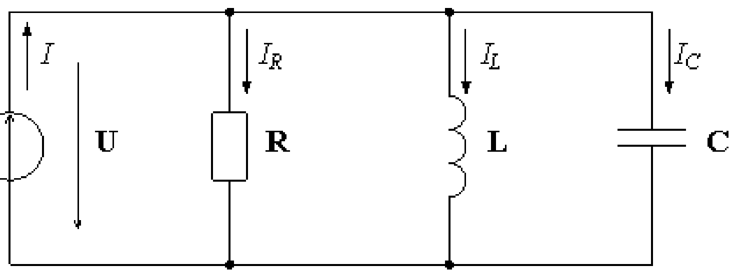
Ответ: 100.

Задача №8.25

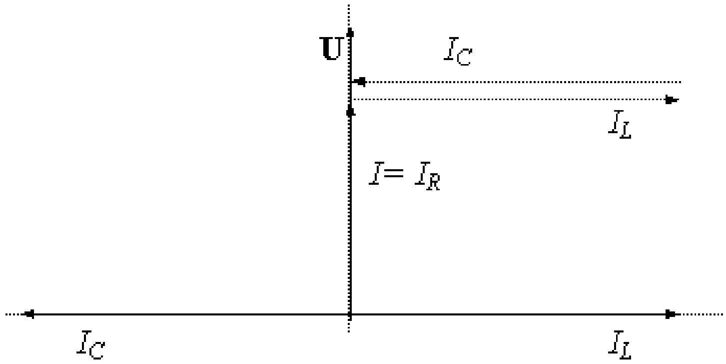
Как и какими индуктивностью L и емкостью C надо подключить катушку и конденсатор к резистору сопротивлением R = 10 *кОм*, чтобы ток через катушку и конденсатор был в 10 раз больше общего тока? Частота переменного напряжения n = 50 *Гц*. Ответ: L = 3,18 *Гн*, C = 3,18 *мкФ*.

Решение:

Дано:	СИ:
$R = 10\,кОм$	$10^4\,Ом$
$I_L = I_C = 10I$	
$\nu = 50\,Гц$	
$L - ?$	
$C - ?$	



Как видно из условия, наблюдается резонанс токов. Такое возможно при параллельном соединении, изображенном на рисунке. Значит, $U = U_L = U_C = U_R$.



Ток через катушку индуктивности

$$U_L = \frac{U}{R_L} \quad (2).$$

Ток через конденсатор

$$U_C = \frac{U}{R_C} \quad (3).$$

Как видно из диаграммы, токи через конденсатор и катушку взаимно компенсируют друг друга. Значит, ток в неразветвленной части

$$I = \frac{U}{R} \quad (4).$$

Подставим (2), (3) и (4) в (1):

$$\frac{U}{R_L} = \frac{U}{R_C} = \frac{10U}{R} \text{ или}$$

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_C} = \frac{10}{R} \quad (5).$$

Катушка оказывает сопротивление переменному току равное

$$R_L = \omega L \quad (6).$$

Конденсатор оказывает сопротивление переменному току равное

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (7).$$

Подставим поочередно (6) и (7) в (5) с учетом того, что $\omega = 2\pi\nu$ и найдем L и C.

$$\frac{1}{2\pi\nu L} = \frac{10}{R} \text{ или } L = \frac{R}{20\pi\nu};$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2\pi\nu C}} = \frac{10}{R} \text{ или } C = \frac{5}{\pi\nu R}.$$

Вычислим L и C:

$$L = \frac{10^4\, Ом}{20 \cdot 3{,}14 \cdot 50\, Гц} = 3{,}18\, Гн.$$

$$C = \frac{5}{3{,}14 \cdot 50\, Гц \cdot 10^4\, Ом} = 3{,}18 \cdot 10^{-6}\, Ф = 3{,}18\, мкФ.$$

Ответ: параллельное соединение, 3,18 *Гн*, 3,18 *мкФ*.

Тема 9. Электромагнитные волны

Задача №9.11

В вакууме вдоль оси *x* распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 *В/м*. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны. Ответ: 0,265 *А/м*.

Решение:

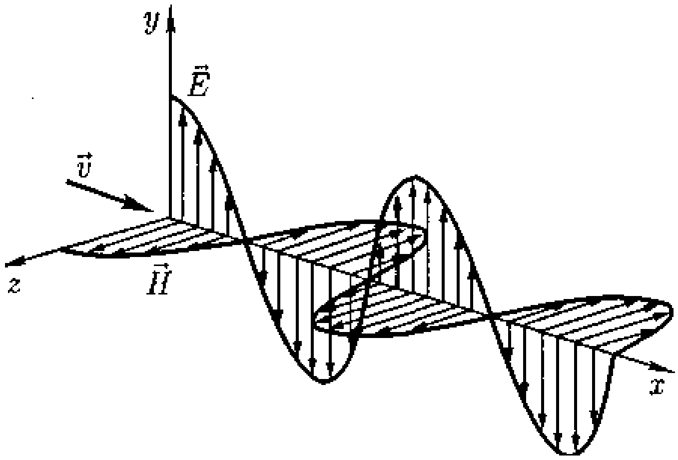
Дано:
$\varepsilon = 1$
$\mu = 1$
$E_0 = 10 \dfrac{В}{м}$

$H_0 - ?$

Из уравнений Максвелла следует, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в одинаковых фазах, причем мгновенные значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H .$$

Следовательно, напряженности электрического и магнитного полей одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль.



$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu\mu_0} H_0 \quad (1).$$

Из (1) следует:

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0}{\sqrt{\mu\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0 .$$

Учитывая, что электромагнитная волна распространяется в вакууме, получим

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 .$$

Вычислим H_0:

$$H_0 = \sqrt{\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}}} \cdot 10 \frac{В}{м} = 2{,}65 \cdot 10^{-2} \frac{А}{м} = 26{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{А}{м} = 26{,}5 \frac{мА}{м} .$$

Ответ: $26{,}5 \dfrac{мА}{м}$.