Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Кафедра теоретических основ электротехники

Расчетно-графическая работа №1

«Расчет цепи постоянного тока»

Вариант №2

Выполнил: студент

Проверил:

201__ г.

Исходные данные

$E_1 = 96B$, $R_1 = 3Ом$, $R_3 = 10Ом$,

$E_2 = 35B$, $R_2 = 15Ом$, $R_4 = 6Ом$.

Исходная схема

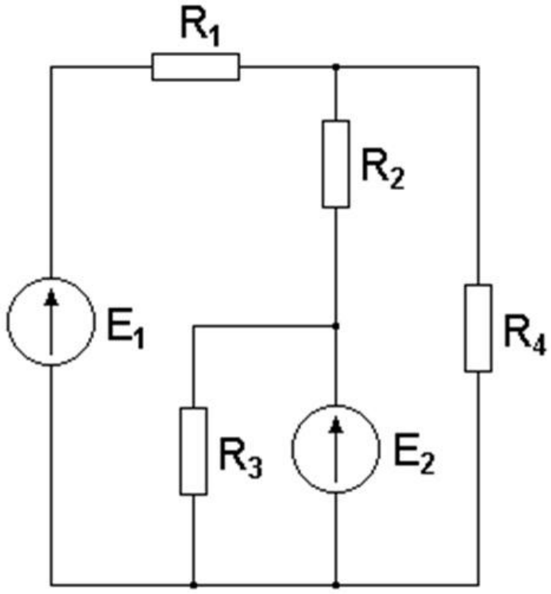


Рисунок 1 – Исходная схема электрической цепи

Задание

В электрической цепи постоянного тока (см. рис. 1) с заданными значениями ЭДС источников и сопротивлений произвести расчет токов в каждой ветви цепи.

1. Произвести расчет с использованием законов Кирхгофа.
2. Произвести проверку расчета по балансу мощности.
3. Произвести расчет методом контурных токов.
4. Произвести расчет тока через сопротивление R_1 (1 – номер группы в потоке) методом эквивалентного генератора.
5. Построить потенциальную диаграмму по внешнему контуру заданной схемы.

Выполнение заданий

1 Схема электрической цепи

В данную схему входит 2 активных (источники ЭДС) и 4 пассивных (сопротивления) элементов, а также 3 неустранимых (1-3) узла и 1 устранимый (4) узел.

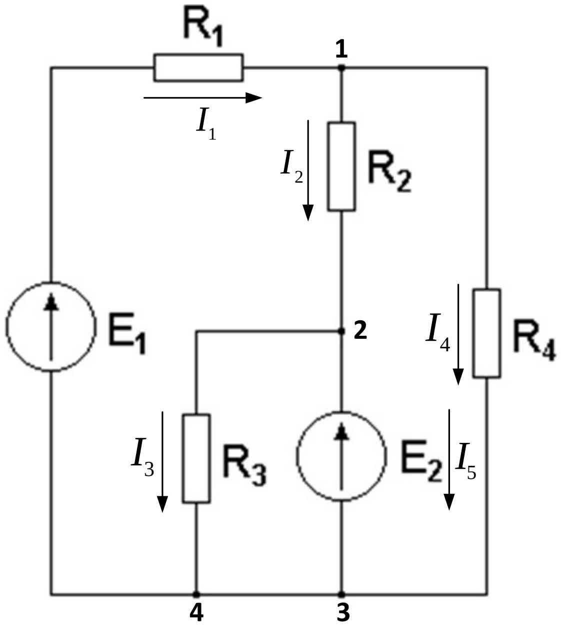


Рисунок 2 – Расчетная схема электрической цепи

2 Ориентированный граф схемы

Для наглядности перейдем от схемы замещения к графу

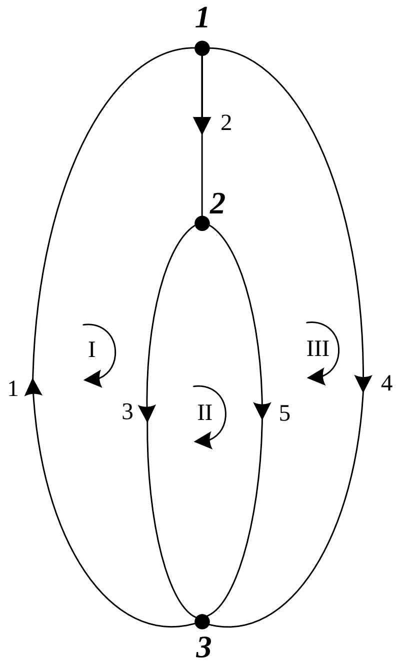


Рисунок 3 – Ориентированный граф схемы

3 Расчет токов с использованием законов Кирхгофа

Задать вычислительной машине топологию цепи рисунком затруднительно, так как не существует эффективных программ распознавания образа. Поэтому топологию цепи вводят в ЭВМ в виде матриц, которые называют топологическими матрицами. В нашей задаче будем использовать две таких матрицы: узловую матрицу (матрица соединений) и контурную матрицу.

1) Узловая матрица (матрица соединений) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы.

Для графа, который изображен на рисунке 3, имеем число узлов m = 3 и число ветвей n = 5. Тогда получиться неопределенная матрица A_H размерности (3×5). Тогда запишем матрицу A_H, принимая, что элемент матрицы a_{ij} (i – номер строки; j – номер столбца) равен 1, если ветвь j соединена с узлом i и ориентирована от него, минус 1, если ориентирована к нему, и 0, если ветвь j не соединена с узлом i:

$$A_H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Проверка правильности составления матрицы A_H осуществляется суммированием всех элементов матрицы, которая должна быть равна 0:

$$\sum_i^3 \sum_j^5 a_{ij} = 0. \tag{2}$$

Просуммировав все элементы A_H (устно), убеждаемся в правильности составления матрицы.

Поскольку по первому закону (закону токов) Кирхгофа целесообразно составлять уравнения для всех узлов за исключением одного, то из матрицы A_H исключим одну строку. Узел схемы электрической цепи, для которого уравнение по первому закону Кирхгофа не составляется, принято называть балансирующим. Строка, соответствующая балансирующему узлу, исключается из матрицы A_H. В результате осуществляется переход от матрицы

A_H, составленной для всех узлов, к узловой матрице A (редуцированной матрице) размерности (2×5), в которой отсутствует строка для балансирующего узла. Балансирующим узлом может быть любой. В нашем случае сделаем балансирующим узел 3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

2) Контурная матрица (матрица контуров) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки контурной матрицы *B* соответствуют контурам, а столбцы – ветвям схемы.

Элемент b_{ij} матрицы ***B*** равен 1, если ветвь *j* входит в контур *i* и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура, минус 1, если не совпадает с направлением обхода контура, и 0, если ветвь *j* не входит в контур *i*.

Матрицу ***B***, записанную для главных контуров, называют **матрицей главных контуров**. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

На основе составленных матриц напишем первый и второй законы Кирхгофа в матричной и алгебраической формах.

1) Первый закон Кирхгофа в матричной форме:

$$AI = -AJ. \tag{5}$$

Так как источники тока отсутствуют, то (5) примет вид:

$$AI = 0, \tag{6}$$

где $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных токов.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Перемножая соответствующие матрицы, получаем алгебраическую форму первого закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_4 = 0, \\ -I_2 + I_3 + I_5 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

2) Второй закон Кирхгофа в матричной форме:

$$BU = BE. \tag{9}$$

где $U = \begin{pmatrix} R_1 I_1 \\ R_2 I_2 \\ R_3 I_3 \\ R_4 I_4 \\ R_5 I_5 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец напряжений;

$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец источников ЭДС.

.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_1 I_1 \\ R_2 I_2 \\ R_3 I_3 \\ R_4 I_4 \\ R_5 I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Перемножая соответствующие матрицы, получаем алгебраическую форму второго закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 = E_1, \\ -I_3R_3 + I_5R_5 = E_2, \\ -I_2R_2 + I_4R_4 - I_5R_5 = -E_2. \end{cases} \tag{11}$$

Решим совместно системы (8) и (9):

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_4 = 0, \\ -I_2 + I_3 + I_5 = 0, \\ I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 = E_1, \\ -I_3R_3 + I_5R_5 = E_2, \\ -I_2R_2 + I_4R_4 - I_5R_5 = -E_2. \end{cases} \tag{12}$$

Запишем систему (12) в матричной форме и решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 15 & 10 & 0 & 0 & 96 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & -15 & 0 & 6 & 0 & 35 \end{array}\right). \tag{13}$$

Умножим первую строку (13) на 3 и сложим с третьей строкой, затем умножим на минус 1:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 10 & 3 & 0 & 96 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & -15 & 0 & 6 & 0 & 35 \end{array}\right). \tag{14}$$

Умножим вторую строку (14) на 18 и сложим с третьей строкой, затем умножим на минус 15 и сложим с пятой строкой, потом умножим на минус 1:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 3 & 18 & 96 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & -15 & 6 & -15 & 35 \end{array}\right). \tag{15}$$

Разделим четвертую строку (15) на минус 10 и поменяем местами с третьей строкой:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 28 & 3 & 18 & 96 \\ 0 & 0 & -15 & 6 & -15 & 35 \end{array}\right). \qquad (16)$$

Умножим третью строку (16) на минус 28 и сложим с четвертой строкой, затем умножим на 15 и сложим с пятой строкой:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 18 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 & 87{,}5 \end{array}\right). \qquad (16)$$

Умножим четвертую строку (16) на минус 2 и сложим с пятой строкой, затем умножим на $\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -51 & 91{,}5 \end{array}\right). \qquad (17)$$

Разделим пятую строку (17) на минус 51:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}7941 \end{array}\right). \qquad (18)$$

Сложим пятую строку со второй строкой, затем умножим пятую строку (18) на минус 6 и сложим с четвертой строкой:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1{,}7941 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10{,}0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}7941 \end{array}\right). \qquad (19)$$

Сложим третью строку (19) со второй:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1{,}7059 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10{,}0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}7941 \end{array}\right). \tag{20}$$

Прибавим к первой строке (20) вторую и четвертую строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11{,}8039 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1{,}7059 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3{,}5000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10{,}0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}7941 \end{array}\right). \tag{21}$$

Имеем следующее решение:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}8039 \\ 1{,}7059 \\ 3{,}5000 \\ 10{,}0980 \\ -1{,}7941 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Знак минус означает, что выбранное направление тока противоположно истинному направлению тока.

4 Баланс мощностей

Баланс мощностей является следствием закона сохранения энергии, а так же критерием проверки правильности полученных результатов.

$$\sum_k E_k I_k + \sum_k J_k U_k = \sum_k R_k I_k^2 \,. \tag{23}$$

Сумма в левой части равенства алгебраическая, а в правой – арифметическая.

Левая часть:

$$E_1 I_1 + E_2 I_5 = 96 \cdot 11{,}8039 + 35 \cdot (-1{,}7941) = 1195{,}9679\,Bm.$$

Правая часть:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 3 \cdot 11{,}8039^2 + 15 \cdot 1{,}7059^2 + 10 \cdot 3{,}5^2 + 6 \cdot 10{,}098^2 =$$
$$= 1195{,}9652\,Bm.$$

Так как обе части практически совпадают, то есть баланс мощностей выполняется, получаем, что проведенные расчеты верны.

5 Определение токов в ветвях схемы методом контурных токов

Выделим в схеме три контура и обозначим контурные токи через $I_{11},\ I_{22},\ I_{33}$. Все контуры имеют направление по часовой стрелке.

$I_{kk}=\begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных контурных токов.

$E_{kk}=\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных контурных ЭДС.

В матричной форме

$$R_{kk}I_{kk}=E_{kk}\,. \tag{24}$$

Собственные источники ЭДС контуров:

$E_{11}=E_1=96\,B$.

$E_{22}=-E_2=-35\,B$.

$E_{33}=E_2=35B$.

Квадратная матрица контурных сопротивлений:

$$R_{kk}=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Собственные сопротивления:

$R_{11}=R_1+R_2+R_3=3+15+10=28\,Ом$.

$R_{22}=R_3=10\,Ом$.

$R_{33}=R_2+R_4=15+6=21\,Ом$.

Взаимные сопротивления:

$R_{12}=R_{21}=-R_3=-10\,Ом$,

$R_{13} = R_{31} = -R_2 = -15\,Ом$,

$R_{23} = R_{32} = 0$.

Составим матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 28 & -10 & -15 \\ -10 & 10 & 0 \\ -15 & 0 & 21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ -35 \\ 35 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Составим расширенную матрицу и решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 28 & -10 & -15 & 96 \\ -10 & 10 & 0 & -35 \\ -15 & 0 & 21 & 35 \end{array}\right). \tag{27}$$

Разделим вторую строку на минус 10 и поменяем местами с первой строкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3{,}5 \\ 28 & -10 & -15 & 96 \\ -15 & 0 & 21 & 35 \end{array}\right). \tag{28}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на минус 28; прибавим к третьей строке первую, умноженную на 15:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 18 & -15 & -2 \\ 0 & -15 & 21 & 87{,}5 \end{array}\right). \tag{29}$$

Разделим третью строку на минус 15 и поменяем местами со второй строкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1{,}4 & -5{,}8333 \\ 0 & 18 & -15 & -2 \end{array}\right). \tag{30}$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на минус 18:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1{,}4 & -5{,}8333 \\ 0 & 0 & 10{,}2 & 103 \end{array}\right). \tag{31}$$

Разделим третью строку на 10,2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1{,}4 & -5{,}8333 \\ 0 & 0 & 1 & 10{,}0980 \end{array}\right). \quad (32)$$

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на 1,4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 8{,}3039 \\ 0 & 0 & 1 & 10{,}0980 \end{array}\right). \quad (33)$$

Прибавим к первой строке вторую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11{,}8039 \\ 0 & 1 & 0 & 8{,}3039 \\ 0 & 0 & 1 & 10{,}0980 \end{array}\right). \quad (34)$$

Получаем:

$I_{11} = 11{,}8039\,A$,

$I_{22} = 8{,}3039\,A$,

$I_{33} = 10{,}0980\,A$.

Выразим истинные токи через контурные:

$I_1 = I_{11} = 11{,}8039\,A$,

$I_2 = I_{11} - I_{33} = 11{,}8039 - 10{,}0980 = 1{,}7059\,A$,

$I_3 = I_{11} - I_{22} = 11{,}8039 - 8{,}3039 = 3{,}5\,A$,

$I_4 = I_{33} = 10{,}0980\,A$,

$I_5 = I_{22} - I_{33} = 8{,}3039 - 10{,}0980 = -1{,}7941\,A$.

6 Метод эквивалентного генератора

Метод позволяет вычислить ток только в одной ветви. Поэтому расчет повторяется столько раз, сколько ветвей с неизвестными токами содержит схема. По отношению к рассчитываемой ветви двухполюсник при расчете может быть заменен эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах этой ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника. Вся схема, кроме рассчитываемой ветви и есть эквивалентный генератор. Тогда ток в рассчитываемой ветви *i* можно найти по закону Ома:

$$I_i = \frac{E_Г \pm E_i}{R_Г + R_i}. \tag{35}$$

Знак здесь зависит от направления ЭДС в рассчитываемой ветви.

Рассчитаем ток I_1 в соответствии с заданием. Для этого оборвем ветвь с искомым током между узлами 3 и 1. Оставшаяся часть схемы и будет представлять собой эквивалентный генератор с эквивалентной ЭДС и сопротивлением.

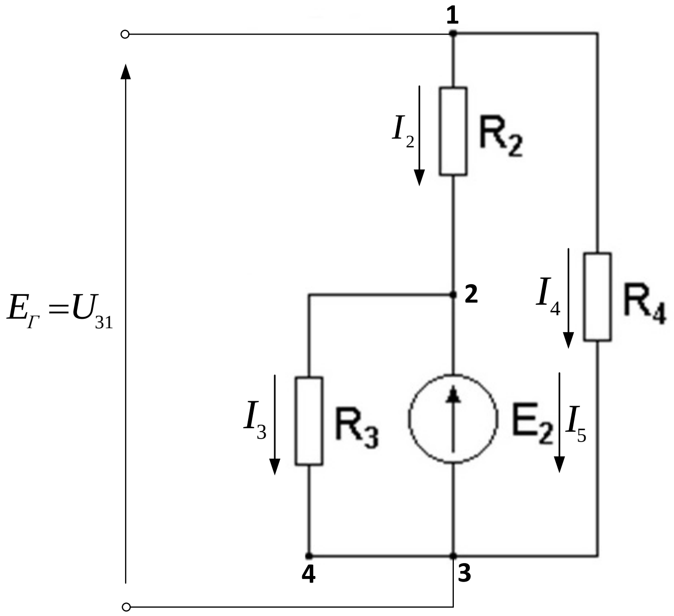


Рисунок 4 – Схема эквивалентного генератора для первой ветви

Определяем эквивалентное сопротивление генератора. Для этого источники ЭДС закорачиваем (заменяем на отрезок провода). Затем производится расчет входного сопротивления оставшейся схемы относительно зажимов 3 и 1.

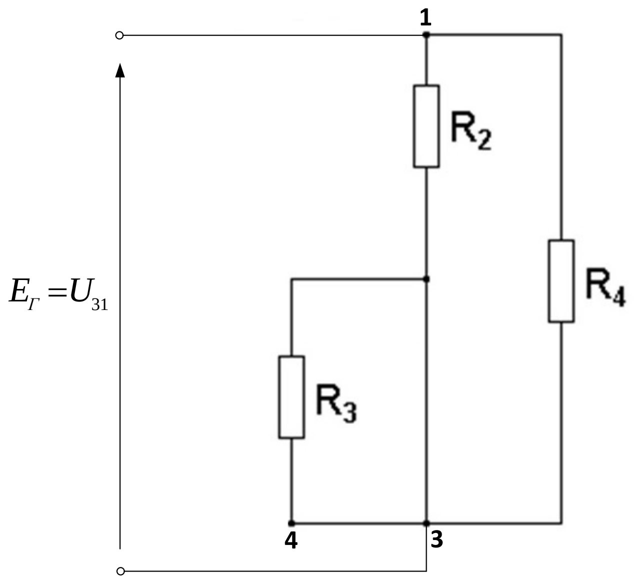


Рисунок 5 – Схема для расчета эквивалентного сопротивления генератора для первой ветви

$$R_Г = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}. \tag{36}$$

Чтобы рассчитать эквивалентную ЭДС генератора, необходимо выбрать путь от точки 3 до точки 1. Как видно из рисунка 4, можно выбрать путь через резистор R_4. Таким образом,

$$E_Г = U_4 = -I_4 R_4. \tag{37}$$

Для нахождения I_4 рассмотрим контур, содержащий E_2, R_2 и R_4. По закону Ома:

$$I_4 = \frac{E_2}{R_2 + R_4}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37), получим ЭДС эквивалентного генератора:

$$E_Г = -\frac{E_2 R_4}{R_2 + R_4}. \tag{39}$$

Пользуясь формулой (35), определим ток в первой ветви:

$$I_1 = \frac{-\dfrac{E_2 R_4}{R_2 + R_4} + E_1}{\dfrac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_1},$$

$$I_1 = \frac{-E_2 R_4 + E_1 (R_2 + R_4)}{R_2 R_4 + R_1 (R_2 + R_4)}. \tag{40}$$

$$I_1 = \frac{-35 \cdot 6 - 96(15+6)}{15 \cdot 6 + 3(15+6)} = \frac{21 \cdot 96 - 35 \cdot 6}{15 \cdot 6 + 3 \cdot 21} = \frac{2016 - 210}{90 + 63} = 11{,}8039\,A.$$

7 Потенциальная диаграмма для внешнего контура (0-1-2-0)

Построим потенциальную диаграмму по внешнему контуру заданной схемы. Сначала изобразим внешний контур. Допустим узел 0 заземлен. Тогда его потенциал равен 0.

$\varphi_0 = 0;$

$\varphi_1 = \varphi_0 + E_1 = 0 + 96 = 96\,B;$

$\varphi_2 = \varphi_1 - I_1 R_1 = 96 - 11{,}8039 \cdot 3 = 60{,}5883\,B;$

$\varphi_0 = \varphi_2 - I_4 R_4 = 60{,}5883 - 10{,}0980 \cdot 6 \approx 0{,}0003 \approx 0.$

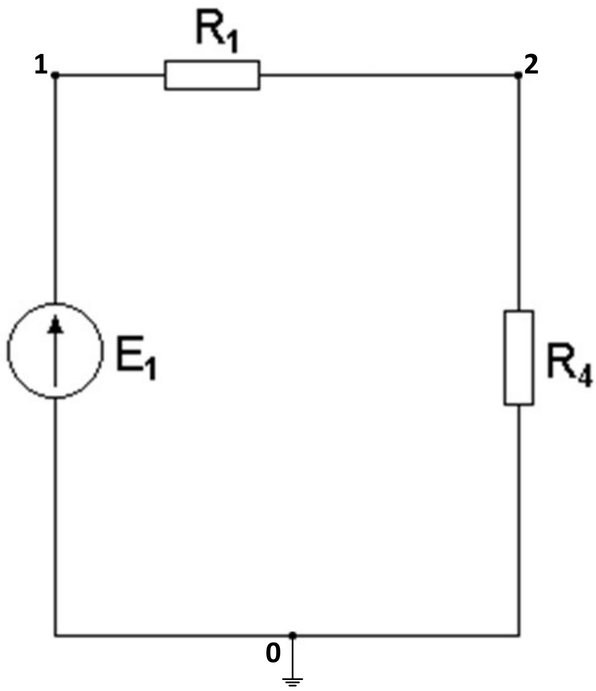
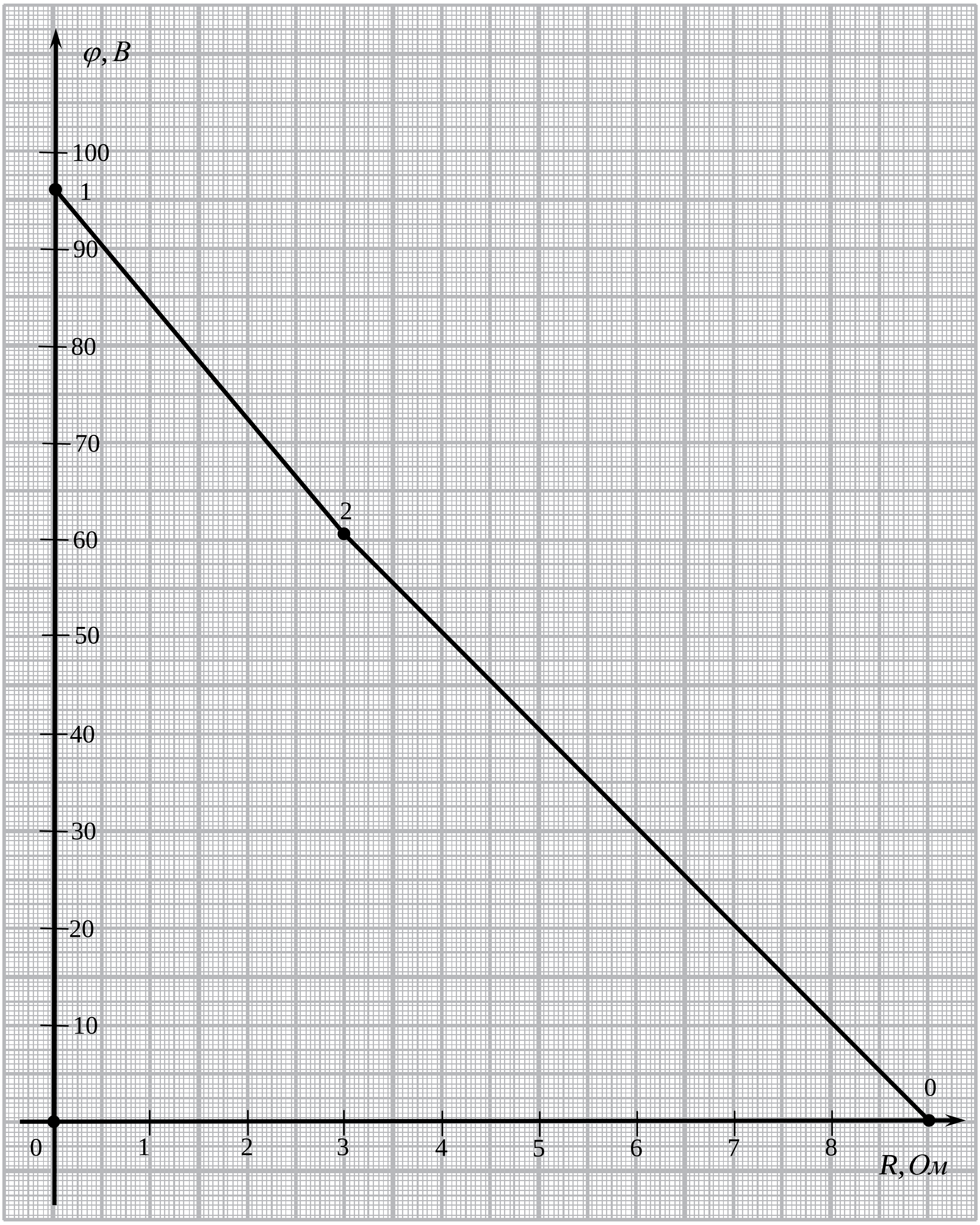


Рисунок 6 – Схема внешнего контура

Диаграмма представлена на рисунке 7.


φ, В
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
R, Ом
1
2
0