Задание 1. Найти средние значения и доверительные интервалы для заданного набора оценок при вероятности P = 0.95 и P = 0.99.

1.5 1.5 3 4.5 4.5 6 1 2.5

Решение:

Истинное значение x оцениваемой величины можно представить в виде неравенства

$$\bar{x} - z\left(P/2\right)\frac{s}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + z\left(P/2\right)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

или доверительного интервала

$$\left(\bar{x} - z\left(P/2\right)\frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z\left(P/2\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \tag{1.1}$$

где n – количество оценок;

$\bar{x}$ – среднее арифметическое заданного набора оценок:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^{n} x_i}{n}, \tag{1.2}$$

$z\left(P/2\right)$ – случайная величина, определяемая из таблицы 1;

s – среднеквадратичное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}. \tag{1.3}$$

Пояснение к выбору параметра z.

1) В случае $P = 0.95$ находим в таблице 1 число $P/2 = \frac{0,95}{2} = 0.475$.

Рассмотрим строку и столбец, содержащие найденное число. В самой левой позиции в данной строке стоит число 1.9, на самом верху столбца стоит число .06. Сумма этих чисел равна 1.96. Это число и является $z\left(P/2\right) = z\left(\frac{0,95}{2}\right) = 1.96$.

2) В случае $P = 0.99$ находим в таблице 1 число $P/2 = \frac{0,99}{2} = 0.495$. В данном случае этого числа в таблице нет, поэтому выбираем ближайшее число. Оба ближайших числа 0,4949 и 0,4951 отличаются от искомого на одинаковое значение равное 0,0001. Чтобы истинное значение наверняка попадал в доверительный интервал, выберем большее число. Рассмотрим строку и столбец, содержащие найденное число. В самой левой позиции в данной строке стоит число 2.5, на самом верху столбца стоит число .08. Сумма этих чисел равна 2.58. Это число и является $z\left(P/2\right) = z\left(\frac{0,99}{2}\right) = 2.58$.

Найдем среднее значение для приведенного набора оценок, пользуясь формулой (1.2):

$$\bar{x} = \frac{1.5 + 1.5 + 3 + 4.5 + 4.5 + 6 + 1 + 2.5}{8} = 3.0625.$$

Найдем среднеквадратичное отклонение для приведенного набора оценок, пользуясь формулой (1.3):

$$s = \sqrt{\frac{2\cdot(1.5-3.0625)^2 + (3-3.0625)^2 + 2\cdot(4.5-3.0625)^2 + (6-3.0625)^2 + (1-3.0625)^2 + (2.5-3.0625)^2}{8-1}} \approx 1.7816.$$

Определим доверительный интервал при P = 0.95 по выражению (1.1):

$$\left(3.0625 - 1.96\cdot\frac{1.7816}{\sqrt{8}};\ 3.0625 + 1.96\cdot\frac{1.7816}{\sqrt{8}}\right);$$

$$(1.83;\ 4.30).$$

Определим доверительный интервал при P = 0.99 по выражению (1.1):

$$\left(3.0625 - 2.58\cdot\frac{1.7816}{\sqrt{8}};\ 3.0625 + 2.58\cdot\frac{1.7816}{\sqrt{8}}\right);$$

$$(1.44;\ 4.69).$$

Ответ: $\bar{x} = 3.06$; доверительный интервал при P = 0.95 $(1.83;\ 4.30)$, при P = 0.99 $(1.44;\ 4.69)$.

Таблица 1 – Таблица стандартного нормального распределения

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Задание 2. Представить данные порядковые ранжировки в виде стандартных ранжировок и определить показатель связанных рангов.

x1≻x2~x5≻x3≻x6~x7≻x8≻x4.

Решение:

Для приписывания численных значений рангов для связанных объектов применим метод средних рангов. Суть метода заключается в том, что когда нет основы для выбора между объектами, то всем приписываются одинаковые ранги. Преимущество метода состоит в том, что сумма рангов при ранжировании остается точно такой, как и при ранжировании без связей.

В общем случае все ранги стандартной ранжировки определяются следующим образом. Пусть ранги для первых нескольких групп лучших альтернатив уже определены, и число альтернатив, уже получивших ранги, равно *p*. Пусть имеется *r* следующих за ними по предпочтительности равноценных альтернатив. Тогда все они получают ранг

$$R_i^G = \frac{2p + r + 1}{2}. \qquad (2.1)$$

Построим стандартную ранжировку. По правилу построения, на место 1 запишем ранг равный $R_1^G = \frac{2 \cdot 0 + 1 + 1}{1} = 1$:

1; …; …; …; …; …; …; ….

Вычислим ранги эквивалентных мест 2 и 5:

$$R_2^G = R_3^G = \frac{2 \cdot 1 + 2 + 1}{2} = 2.5.$$

Тогда стандартная ранжировка выглядит так:

1; 2.5; …; …; 2.5; …; …; ….

На третье место встает ранг $R_4^G = \frac{2 \cdot 3 + 1 + 1}{2} = 4$:

1; 2.5; 4; …; 2.5; …; …; ….

На шестое и седьмое места встает ранг $R_5^G = R_6^G = \frac{2 \cdot 4 + 2 + 1}{2} = 5.5$:

1; 2.5; 4; …; 2.5; 5.5; 5.5; ….

На восьмом месте ранг $R_7^G = \dfrac{2 \cdot 6 + 1 + 1}{1} = 7$:

$$1;\ 2.5;\ 4;\ \ldots;\ 2.5;\ 5.5;\ 5.5;\ 7.$$

На четвертом месте ранг $R_8^G = \dfrac{2 \cdot 7 + 1 + 1}{1} = 8$:

$$1;\ 2.5;\ 4;\ 8;\ 2.5;\ 5.5;\ 5.5;\ 7.$$

Проверку правильности вычисления рангов определим по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} Ri = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2.2}$$

т.е. сумма всех рангов оцененного множества альтернатив или объектов – есть сумма натуральных чисел от 1 до *n* включительно.

$$1 + 2.5 + 4 + 8 + 2.5 + 5.5 + 5.5 + 7 = \frac{8(8+1)}{2};$$

$36 = 36$, верно.

Определим показатель связанных рангов по формуле:

$$T = \frac{1}{12} \sum_{d=1}^{H} \left(h_d^3 - h_d \right), \tag{2.3}$$

где H – число групп совпадающих рангов в ранжировке,

h_d – число равных рангов в группе с номером d.

$$T = \frac{1}{12} \left(\left(2^3 - 2 \right) + \left(2^3 - 2 \right) \right) = 1.$$

Ответ: 1; 2.5; 4; 8; 2.5; 5.5; 5.5; 7. $T = 1$.

Задание 3. Исходя из ранжировок, заданных экспертами:

1. Найти групповую (результирующую) группировку в балльном и порядковом виде.
2. Оценить согласованность мнений экспертов на уровне значимости 0.100, 0.050, 0.025, 0.010, 0.005. Лучшими альтернативами являются те, у которых оценки ниже.

Таблица 2 – Исходная таблица

1	2.5	2.5	3	5	4
1	2	3	5	4	5
3	5	2	2	5	1
2	4	2	1	2	3
2	1	1	3	4	5

Решение:

Для наглядности дополним таблицу 2 заголовком, столбцом «Эксперты» и строкой «Сумма рангов».

Таблица 3 – Ранжировка шести альтернатив пятью экспертами

Эксперты	Факторы					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$Э_1$	1	2.5	2.5	3	5	4
$Э_2$	1	2	3	5	4	5
$Э_3$	3	5	2	2	5	1
$Э_4$	2	4	2	1	2	3
$Э_5$	2	1	1	3	4	5
Сумма рангов	9	14.5	10.5	14	20	18

Прежде всего определим результирующую ранжировку. По условию задачи лучшими альтернативами являются те, у которых оценки ниже. Значит, стандартная ранжировка в бальном виде выглядит так: 1, 4, 2, 3, 6, 5. Применяя к сумме рангов правило построения стандартной ранжировки в задании 2, получим стандартную ранжировку 1, 3, 4, 2, 6, 5 в порядковом виде. Как видно, порядковый вид совпадает с бальным.

В данном примере количество экспертов $N = 5$, количество мнений каждого эксперта $m = 6$. Рассмотрим уровни значимости 0.100; 0.050; 0.025; 0.010; 0.005. Степень свободы $d = m – 1 = 5$. По таблице 4 находим пять чисел на пересечении строки с $d = 5$ и столбцов с заголовками 0.100; 0.050; 0.025; 0.010; 0.005. Они равны 9.2363, 11.0705, 12.8325, 15.0863 и 16.7496.

Таблица 4 – Таблица критических значений χ^2-распределения

d \ α	**0.995**	**0.990**	**0.975**	**0.950**	**0.900**	**0.100**	**0.050**	**0.025**	**0.010**	**0.005**
1	$4\cdot10^{-15}$	$2\cdot10^{-15}$	$1\cdot10^{-15}$	$4\cdot10^{-13}$	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.1558	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0536	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.0738	3.57.06	4.4038	5.2260	6.3038	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5467	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.4339	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Для оценки мнений экспертов определим величину S, которая характеризует отклонение суммарных рангов отдельных альтернатив от их среднего значения $\bar{r}$:

$$S = \sum_{j=1}^{m} \left(r_j - \bar{r} \right)^2, \tag{3.1}$$

где $\bar{r} = \dfrac{N(m+1)}{2} = \dfrac{5 \cdot (6+1)}{2} = 17{,}5.$

Используя значения r_j из последней строки таблицы 3, получаем

$$S=(9-17.5)^2+(14.5-17.5)^2+(10.5-17.5)^2+(14-17.5)^2+(20-17.5)^2+(18-17.5)^2=149.$$

Так как в исходных ранжировках нет связанных рангов, то находим коэффициент конкордации по формуле

$$W=\frac{12S}{N^2\left(m^3-m\right)}. \tag{3.2}$$

$$W=\frac{12\cdot 149}{5^2\left(6^3-6\right)}=\frac{1788}{25\cdot 210}\approx 0{,}3406.$$

По имеющимся ранжировкам вычислим фактическое значение по формуле

$$U_f=N(m-1)W. \tag{3.3}$$

$$U_f=5\cdot(6-1)\cdot 0{,}3406\approx 8{,}5143.$$

Сравнивая это число с ранее приведенными критическими значениями 9.2363, 11.0705, 12.8325, 15.0863 и 16.7496, приходим к следующим выводам: поскольку 8.5143<9.2363, 8.5143<11.0705, 8.5143<12.8325, 8.5143<15.0863 и 8.5143<16.7496, то можно считать, что на всех приведенных уровнях значимости мнения экспертов несогласованны.

Ответ: 1) стандартная ранжировка в бальном и порядковом видах: 1, 4, 2, 3, 6, 5; 2) мнения экспертов на всех приведенных уровнях значимости несогласованны.

Задание 4. Посчитать коэффициент корреляции Спирмена для первой и последней ранжировки, данной экспертами. Данные взять из вариантов к заданию 3 с теми же номерами.

Решение:

Чтобы определить согласованность мнений двух экспертов, дающих свои независимые друг от друга ранжировки нескольких альтернатив используется коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Обозначим ранжировки первого и последнего экспертов в таблице 3 задания 3 через $r_1 = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1m}) = (1, 2.5, 2.5, 3, 5, 4)$, $r_5 = (r_{51}, r_{52}, \ldots, r_{5m}) =$ $= (2, 1, 1, 3, 4, 5)$, где m = 6 количество альтернатив.

Определим отклонение суммарных рангов двух альтернатив друг от друга по формуле:

$$S_{15}^2 = \sum_{i=1}^{m} (r_{1i} - r_{5i})^2 . \tag{4.1}$$

$$S_{15}^2 = (1-2)^2 + (2.5-1)^2 + (2.5-1)^2 + (3-3)^2 + (5-4)^2 + (4-5)^2 = 7.5 .$$

Коэффициент корреляции при отсутствии связанных рангов определяется по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6S_{15}^2}{m^3 - m} . \tag{4.2}$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 7.5}{6^3 - 6} = 0{,}25 .$$

$\rho < 0{,}3$ является показателем слабой тесноты связи.

Ответ: $\rho = 0{,}25$.

Задание 5. Исходя из представленных несколькими экспертами матрицами попарных сравнений альтернатив, найти их веса методом парных сравнений.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ R_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ R_6 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Пусть один эксперт производит оценку всех пар альтернатив, давая числовую оценку:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1,\ \textit{если}\ A_i \succ A_j \\ 0.5,\ \textit{если}\ A_i \succ A_j \\ 0,\ \textit{если}\ A_i \prec A_j \end{cases}. \tag{5.1}$$

Посчитаем элементы матриц по формуле

$$x_{ij} = \frac{1}{2} + \frac{N_i - N_j}{2N}, \tag{5.2}$$

где N_i – количество оценок, равное 1 (в пользу предпочтения);

N_j – количество оценок, равное 0 (противоположно оценке 1);

N – количество экспертов.

Применяя формулу (5.2) к матрицам R_1, R_2 и R_3, получим элементы матрицы $X = x_{ij}$ $(i, j = 1,2,3,4)$. Заметим, что в главной диагонали всех матриц R_1, R_2 и R_3 стоят элементы $\frac{1}{2}$. Поэтому $x_{ij} = \frac{1}{2}$ при $i = j$. Сначала определим элементы над главной диагональю:

$$x_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}, \qquad x_{13} = \frac{1}{2} + \frac{2-1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \qquad x_{14} = \frac{1}{2} + \frac{1-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3},$$

$$x_{23} = \frac{1}{2} + \frac{2-1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \qquad x_{24} = \frac{1}{2} + \frac{0-0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}, \qquad x_{34} = \frac{1}{2} + \frac{1-0}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Оставшиеся 6 элементов, расположенные под главной диагональю матрицы X, определяются относительно элементов, расположенных над главной диагональю, по формуле $x_{ij} + x_{ji} = 1$:

$$x_{21} = 1 - x_{12} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad x_{31} = 1 - x_{13} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad x_{32} = 1 - x_{23} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$x_{41} = 1 - x_{14} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad x_{42} = 1 - x_{24} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_{43} = 1 - x_{34} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

В итоге получаем матрицу:

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/2 & 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/2 & 2/3 \\ 2/3 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Умножим все элементы матрицы X на общий знаменатель элементов этой матрицы. Получим матрицу $Y = 6X$:

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведем для матрицы Y итеративный процесс. Начнем с вектора $k^0 = (1, 1, 1, 1)$:

$$Y \cdot k^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+4+2 \\ 4+3+4+3 \\ 2+2+3+4 \\ 4+3+2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = k^1.$$

Далее получаем

$$Y \cdot k^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33+28+44+24 \\ 44+42+44+36 \\ 22+28+33+48 \\ 44+42+22+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \\ 166 \\ 131 \\ 144 \end{pmatrix} = k^2.$$

и

$$Y \cdot k^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 129 \\ 166 \\ 131 \\ 144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 387 + 332 + 524 + 288 \\ 516 + 498 + 524 + 432 \\ 258 + 332 + 393 + 576 \\ 516 + 498 + 262 + 432 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1531 \\ 1970 \\ 1559 \\ 1708 \end{pmatrix} = k^3.$$

Разделим каждый из векторов k^1, k^2 и k^3 на его максимальную компоненту. Получим векторы, которые являются весами, полученными после соответствующих итераций:

$$v_1 = (0{,}786;\ 1;\ 0{,}786;\ 0{,}857);$$

$$v_2 = (0{,}777;\ 1;\ 0{,}789;\ 0{,}867);$$

$$v_3 = (0{,}777;\ 1;\ 0{,}791;\ 0{,}867).$$

Самая большая разность между компонентами векторов, полученных на последних и предпоследних этапах итераций равна $0{,}002$. $0{,}002 \le 0{,}01$, значит, наблюдается техническая сходимость.

Ответ: $v_3 = (0{,}777;\ 1;\ 0{,}791;\ 0{,}867)$.