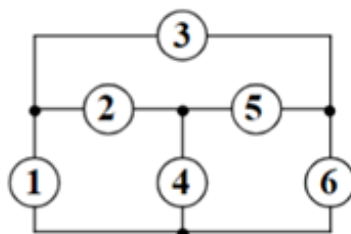


## Задача 1

**Таблица 1.3**

Вариант	Схема	Параметры источников энергии: $J$ [A], $E$ [B]			Параметры резисторов [Ом]					
					1	2	3	4	5	6
1	1	$\uparrow J_6=2$	$\leftarrow E_5=6$	$\uparrow E_1=35$	8	9	1	6	9	-



Рс.1.1. Общая схема

1. Найти: все неизвестные токи, используя законы Кирхгофа (ЗК).
2. Найти: все неизвестные токи МКТ
3. Найти: все неизвестные токи МУН

Дано:  $J_6=2$  А,  $E_5=6$  В,  $E_1=35$  В,  $R_1=8$  Ом,  $R_2=9$  Ом,  $R_3=1$  Ом,  $R_4=6$  Ом,  $R_5=9$  Ом.

Решение:

1. Составляем расчетную схему по исходным данным:

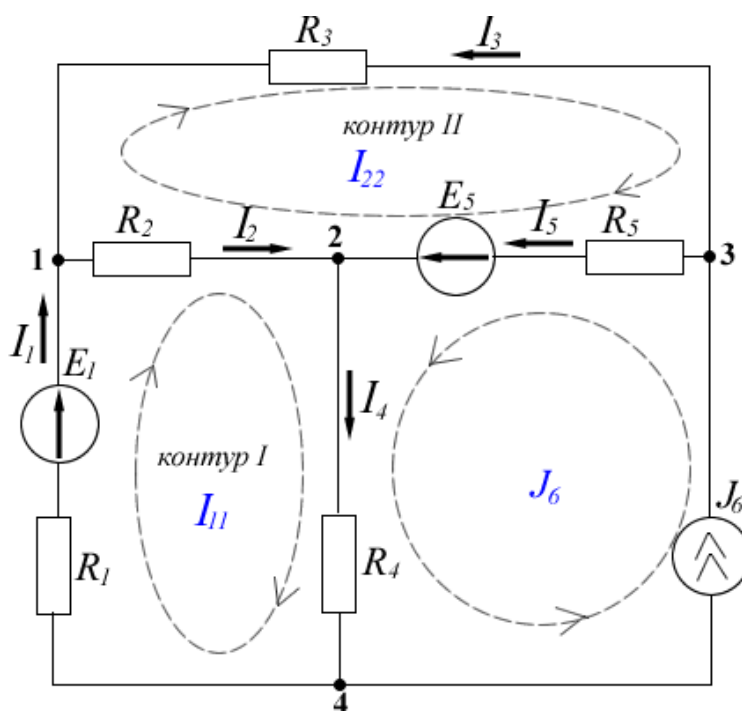


Рис.1.2. Расчетная схема

## 2. Решение с использованием законов Кирхгофа

Всего в схеме шесть ветвей  $p_B = 6$ , ветвей с источниками тока  $p_T = 1$ , число неизвестных токов равно  $p = p_B - p_T = 5$ , количество узлов  $q = 4$ , число уравнений по первому закону Кирхгофа  $-(q-1) = 4-1 = 3$ , число уравнений по второму закону Кирхгофа  $n = p - (q-1) = 2$ .

Выберем положительные направления токов и обозначим их стрелками. Выберем и обозначим стрелками направления обхода двух независимых контуров:  $I, II$ . Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\text{для узла } 1 \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{для узла } 2 \quad I_2 - I_4 + I_5 = 0$$

$$\text{для узла } 3 \quad -I_3 - I_5 + J_6 = 0$$

$$\text{для контура } I \quad I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_4 R_4 = E_1$$

$$\text{для контура } II \quad -I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_5 R_5 = E_5$$

Полученные уравнения после подстановки в них числовых значений будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 = 0 \\ -I_3 - I_5 + 2 = 0 \\ 8I_1 + 9I_2 + 6I_4 = 35 \\ -9I_2 - 1I_3 + 9I_5 = 6 \end{cases}$$

Система уравнений содержит пять неизвестных токов, поэтому для облегчения расчета воспользуемся программой Mathcad.

Given

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$I_2 - I_4 + I_5 = 0$$

$$-I_3 - I_5 + 2 = 0$$

$$8I_1 + 9I_2 + 6I_4 = 35$$

$$-9I_2 - 1I_3 + 9I_5 = 6$$

$$\text{Find}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \begin{pmatrix} 0.924 \\ 1.118 \\ 0.194 \\ 2.924 \\ 1.806 \end{pmatrix}$$

Решение данной системы:  $I_1 = 0,924 \text{ A}$ ,  $I_2 = 1,118 \text{ A}$ ,  $I_3 = 0,194 \text{ A}$ ,  $I_4 = 2,924 \text{ A}$ ,  $I_5 = 1,806 \text{ A}$ .

3. Решение методом контурных токов:

Выберем направления контурных токов (рис.2), которые обозначим  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  и  $J_6$  (последний известен).

Составим систему уравнений по второму закону Кирхгофа для контуров с токами  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ :

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_4) - I_{22}R_2 + J_6R_4 = E_1 \\ -I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) + J_6R_5 = E_5 \end{cases}$$

После подстановки исходных данных получим

$$\begin{cases} I_{11}(8 + 9 + 6) - 9I_{22} = 35 - 2 \cdot 6 \\ -9I_{11} + I_{22}(9 + 1 + 9) = 6 - 2 \cdot 9 \end{cases}$$

После упрощения получим

$$\begin{cases} 23I_{11} - 9I_{22} = 23 \\ -9I_{11} + 19I_{22} = -12 \end{cases}$$

Находим контурные токи матричным методом, где главный определитель  $\Delta$  равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & -9 \\ -9 & 19 \end{vmatrix} = 23 \cdot 19 - (-9) \cdot (-9) = 356$$

Аналогично находим остальные определители как  $\Delta_k$  - определитель, полученный из определителя  $\Delta$  заменой столбца с номером  $k$ , столбцом правой части системы уравнений

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 23 & -9 \\ -12 & 19 \end{vmatrix} = 23 \cdot 19 - (-9) \cdot (-12) = 329$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 23 & 23 \\ -9 & -12 \end{vmatrix} = 23 \cdot (-12) - 23 \cdot (-9) = -69$$

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{329}{356} = 0,924 \text{ A};$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{-69}{356} = -0,194 \text{ A}$$

Определяем токи в ветвях в соответствии с направлениями контурных токов на рис.1.2.

$$I_1 = I_{11} = 0,924 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,924 - (-0,194) = 1,118 \text{ A}$$

$$I_3 = -I_{22} = -(-0,194) = 0,194 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{11} + J_1 = 0,924 + 2 = 2,924 \text{ A}$$

$$I_5 = I_{22} + J_1 = -0,194 + 2 = 1,806 \text{ A}$$

#### 4. Решение методом узловых напряжений

Составляем систему для узлов 1, 2, 3. Узел 4 мысленно заземляем, т.е.  $\varphi_4 = 0$ .

Система уравнений, составленная по методу узловых потенциалов для данной цепи, в общем виде имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 g_{11} + \varphi_2 g_{12} + \varphi_3 g_{13} = J_{11} \\ \varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} + \varphi_3 g_{23} = J_{22} \\ \varphi_1 g_{31} + \varphi_2 g_{32} + \varphi_3 g_{33} = J_{33} \end{cases}$$

$g_{11}, g_{22}, g_{33}$  – сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1, 2 и 3 соответственно.

$g_{12}, g_{13}, g_{23}$  – сумма проводимостей ветвей, соединяющих пары узлов 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3 соответственно.

$J_{11}, J_{22}, J_{33}$  – узловые токи для узлов 1, 2 и 3 соответственно.

Решение этой системы в среде MathCAD выглядит следующим образом

$$R_1 := 8 \quad R_2 := 9 \quad R_3 := 1 \quad R_4 := 6 \quad R_5 := 9$$

$$E_1 := 35 \quad E_5 := 6 \quad J_6 := 2$$

$$g_{11} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 1.236 \quad g_{22} := \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0.389 \quad g_{33} := \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = 1.111$$

$$g_{12} := \frac{-1}{R_2} = -0.111 \quad g_{21} := \frac{-1}{R_2} = -0.111 \quad g_{13} := \frac{-1}{R_3} = -1$$

$$g_{31} := \frac{-1}{R_3} = -1 \quad g_{23} := \frac{-1}{R_5} = -0.111 \quad g_{32} := \frac{-1}{R_5} = -0.111$$

$$J_{11} := \frac{E_1}{R_1} = 4.375 \quad J_{22} := \frac{E_5}{R_5} = 0.667 \quad J_{33} := \frac{-E_5}{R_5} + J_6 = 1.333$$

Given

$$\varphi_1 \cdot g_{11} + \varphi_2 \cdot g_{12} + \varphi_3 \cdot g_{13} = J_{11}$$

$$\varphi_1 \cdot g_{21} + \varphi_2 \cdot g_{22} + \varphi_3 \cdot g_{23} = J_{22}$$

$$\varphi_1 \cdot g_{31} + \varphi_2 \cdot g_{32} + \varphi_3 \cdot g_{33} = J_{33}$$

$$\text{Find}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{pmatrix} 27.607 \\ 17.545 \\ 27.801 \end{pmatrix}$$

В результате получены следующие значения потенциалов в узлах цепи:

$$\varphi_1 := 27.607 \quad \varphi_2 := 17.545 \quad \varphi_3 := 27.801 \quad \varphi_4 := 0$$

Токи в ветвях найдутся в соответствии с законом Ома по формулам:

$$I_1 := \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = 0.924 \quad I_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = 1.118$$

$$I_3 := \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_3} = 0.194 \quad I_4 := \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = 2.924$$

$$I_5 := \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_5}{R_5} = 1.806$$

Токи, найденные тремя методами, сведем в таблицу

метод/токи	$I_1, A$	$I_2, A$	$I_3, A$	$I_4, A$	$I_5, A$
законов Кирхгофа	0,924	1,118	0,194	2,924	1,806
контурных токов	0,924	1,118	0,194	2,924	1,806
узловых потенциалов	0,924	1,118	0,194	2,924	1,806

Результаты вычислений совпадают.

## Задача 2

**Таблица 3.3**

Вариант	Схема	Элементы ветвей $R$ [Ом], $L$ [мГн], $C$ [мкФ]	Заданная величина $i$ [А]; $e, u$ [В]
1	3.1	$C_1=400, R_2=6, L_3=20, R_4=6$	$u_4=11,57\sin(500t+43,7^\circ)$

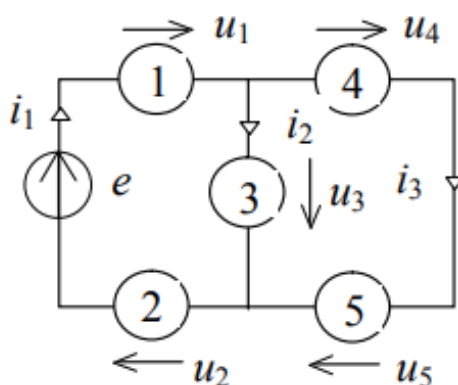


Рис.2.1. Общая схема

Найти:

- мгновенные значения токов во всех ветвях, напряжений на всех элементах и ЭДС
- построить векторную диаграмму для любого узла и любого контура
- составить баланс мощностей

Дано:  $C_1=400$  мкФ,  $R_2=6$  Ом,  $L_3=20$  мГн,  $R_4=6$  Ом,  $u_4=11,57\sin(500t+43,7^\circ)$  В.

Решение:

1. По исходным данным составим расчетную схему:

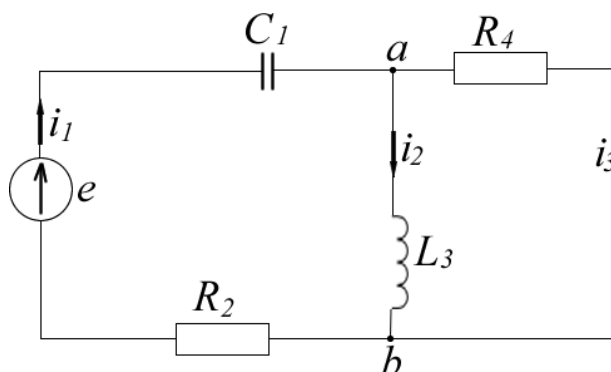


Рис.2.2. Расчетная схема

2. Определим комплексные значения индуктивного и емкостного сопротивлений:

$$X_{L3} = \omega L_3 = 500 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом}$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{500 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 5 \text{ Ом}$$

3. Выберем положительные направления токов в ветвях (рис.2.2) и совпадающие с направлением токов положительные направления напряжений на пассивных элементах, положительные направления соответствующих комплексных значений тока и напряжения такие же (рис.2.3).

Проведем эквивалентное преобразование схемы (рис.2.3).

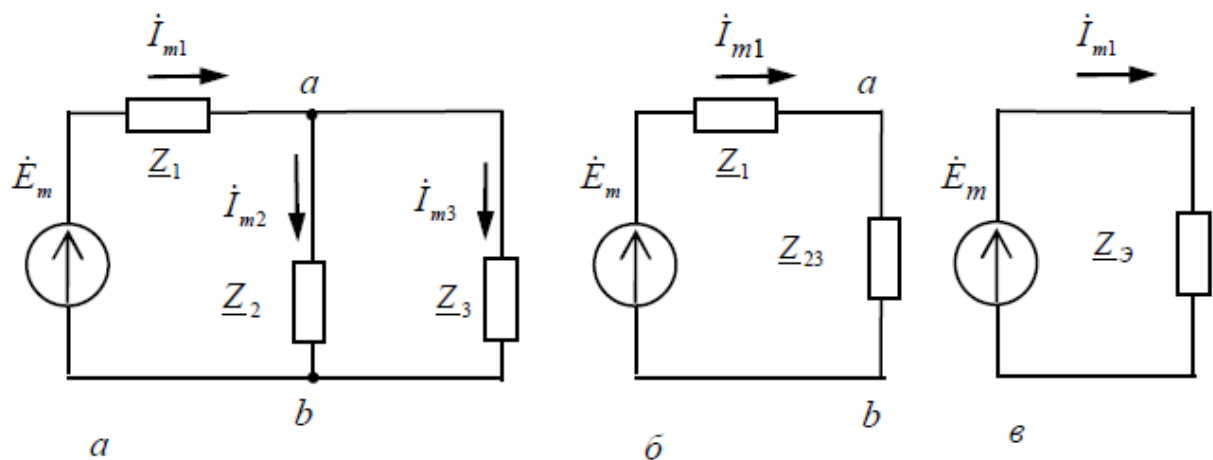


Рис.2.3. Эквивалентное преобразование схемы

4. Находим комплексные сопротивления ветвей (рис.2.3):

$$\underline{Z}_1 = R_2 - jX_{C1} = 6 - j5 = 7,810e^{-j39,81^\circ} \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L3} = j10 = 10e^{j90^\circ} \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = R_4 = 6 \text{ Ом}$$

5. Найдём эквивалентное сопротивление параллельного соединения ветвей с токами  $I_2$  и  $I_3$ :

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{10e^{j90^\circ} \cdot 6}{j10 + 6} = \frac{60e^{j90^\circ}}{11,662e^{j59,04^\circ}} = 5,145e^{j30,96^\circ} = 4,412 + j2,647 \text{ Ом}$$

Входное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_3 &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 6 - j5 + 4,412 + j2,647 = 10,412 - j2,353 \\ &= 10,675e^{-j12,73^\circ} \text{ Ом}\end{aligned}$$

6. По заданному напряжению на резистивном элементе  $\dot{u}_4$  определяем комплексную амплитуду тока  $\dot{I}_{m3}$  по закону Ома для данного элемента:

$$\dot{I}_{m3} = \frac{\dot{u}_4}{R_4} = \frac{11,57e^{j43,7^\circ}}{6} = 1,928e^{j43,7^\circ} = 1,394 + j1,332 \text{ A}$$

аналитическое выражение для мгновенного значения этого тока запишется как

$$i_3 = 1,928 \sin(500t + 43,7^\circ) \text{ A}$$

Находим значения токов  $\dot{I}_{m2}, \dot{I}_{m1}$ . Так как вторая и третья ветвь соединены параллельно, то комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_{m2}$  по закону Ома

$$\dot{I}_{m2} = \frac{\dot{u}_4}{\underline{Z}_2} = \frac{11,57e^{j43,7^\circ}}{10e^{j90^\circ}} = 1,157e^{-j46,3^\circ} = 0,799 - j0,836 \text{ A}$$

аналитическое выражение для мгновенного значения этого тока запишется как

$$i_2 = 1,157 \sin(500t - 46,3^\circ) \text{ A}$$

комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_{m1}$  по первому закону Кирхгофа для узла «а»:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{m1} &= \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} = 0,799 - j0,836 + 1,394 + j1,332 = 2,193 + j0,496 \\ &= 2,248e^{j12,74^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

аналитическое выражение для мгновенного значения этого тока запишется как

$$i_1 = 2,248 \sin(500t + 12,74^\circ) \text{ A}$$

7. Находим амплитуду ЭДС источника

$$\dot{E}_m = \dot{I}_{m1} \cdot \underline{Z}_3 = 2,248e^{j12,74^\circ} \cdot 10,675e^{-j12,73^\circ} = 23,994e^{j0,01^\circ} \approx 24 \text{ B}$$

аналитическое выражение ЭДС запишется как

$$e = 24 \sin(500t + 0^\circ) \text{ B}$$

8. Комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи определяем по закону Ома:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= (-jX_{C1}) \cdot \dot{I}_{m1} = 5e^{-j90^\circ} \cdot 2,248e^{j12,74^\circ} = 11,24e^{-j77,26^\circ} \\ &= 2,479 - j10,963 \text{ B}\end{aligned}$$



$$\dot{u}_2 = R_2 \cdot \dot{I}_{m1} = 6 \cdot 2,248e^{j12,74^\circ} = 13,488e^{j12,74^\circ} = 13,156 + j2,974 \text{ В}$$

$$\dot{u}_3 = jX_{L3} \cdot \dot{I}_{m2} = 10e^{j90^\circ} \cdot 1,157e^{-j46,3^\circ} = 11,57e^{j43,7^\circ} = 8,365 + j7,994 \text{ В}$$

$$\dot{u}_4 = \dot{u}_3 = 11,57e^{j43,7^\circ} = 8,365 + j7,994 \text{ В}$$

9. Запишем выражения для мгновенных значений напряжений на элементах по их найденным комплексным амплитудам:

$$u_1 = 11,24 \sin(500t - 77,26^\circ) \text{ В}$$

$$u_2 = 13,488 \sin(500t + 12,74^\circ) \text{ В}$$

$$u_3 = 11,57 \sin(500t + 43,7^\circ) \text{ В}$$

$$u_4 = 11,57 \sin(500t + 43,7^\circ) \text{ В}$$

10. Строим диаграмму для найденных мгновенных значений тока для узла «а» и напряжений для внешнего контура, включающего напряжения  $e$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  на элементах ЭДС,  $C_1$ ,  $R_4$ ,  $R_2$ .

Выбираем масштаб построения для тока  $m_I=0,3 \text{ А}$ , для напряжения  $m_U=2 \text{ В}$ .

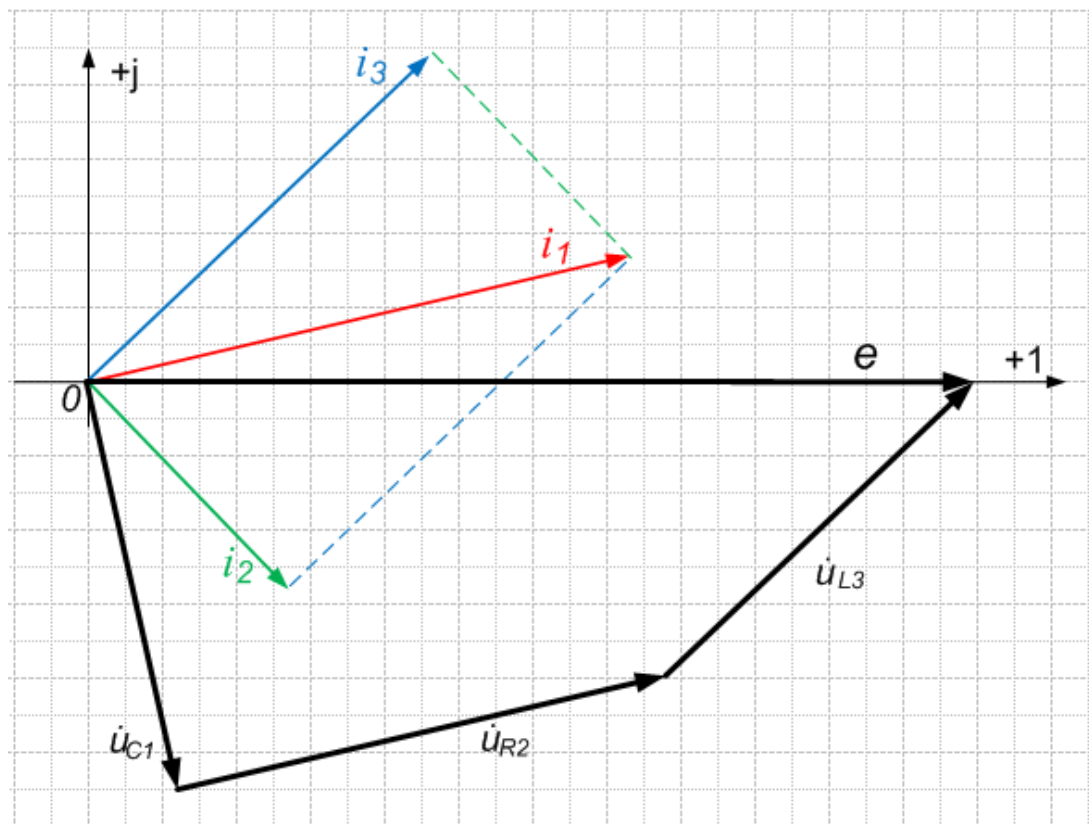


Рис.2.4. Диаграмма

## 11. Составим баланс мощностей

полная комплексная мощность источника, где  $\dot{I}_{m1}^*$  - комплексно-сопряженное значение тока источника:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\text{ист}} &= \frac{e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\dot{I}_{m1}^*}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2,248e^{-j12,74^\circ}}{\sqrt{2}} = \frac{53,952e^{-j12,74^\circ}}{2} = 26,976e^{-j12,74^\circ} \\ &= 26,312 - j5,949 \text{ ВА}\end{aligned}$$

откуда активная мощность источника равна

$$P_{\text{ист}} = 26,312 \text{ Вт}$$

реактивная мощность источника равна

$$Q_{\text{ист}} = -5,949 \text{ ВАр}$$

находим суммарную активную мощность потребителей

$$P_{\text{потр}} = \left(\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R_2 + \left(\frac{I_{m3}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R_4 = \left(\frac{2,248}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 6 + \left(\frac{1,928}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 6 = 26,312 \text{ Вт}$$

находим суммарную реактивную мощность потребителей

$$\begin{aligned}Q_{\text{потр}} &= \left(\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (-X_{C1}) + \left(\frac{I_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot X_{L3} = \left(\frac{2,248}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (-5) + \left(\frac{1,157}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 10 \\ &= -5,941 \text{ ВАр}\end{aligned}$$

полная комплексная мощность потребителей

$$\tilde{S}_{\text{потр}} = P_{\text{потр}} + jQ_{\text{потр}} = 26,312 - j5,941 \text{ ВА}$$

Получили, что  $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$ ,  $Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}}$ ,  $\tilde{S}_{\text{ист}} = \tilde{S}_{\text{потр}}$ .

Баланс выполняется.

## Использованная литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров / Л.А. Бессонов. – 12-е изд., исправ. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 701 с. – Серия: бакалавр. Углубленный курс.
2. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника. Учеб. для вузов. – 6-е изд. перераб. – М.: Высш. шк., 2000. – 542 с.: ил.
3. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энерг. и приборост. спец. вузов. – 4-е изд., перераб. /Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.; Под ред. Бессонова. – М.: Высш. шк.; 2000. – 528 с.: ил.
4. Жаворонков, М. А. Электротехника и электроника: учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / М. А. Жаворонков, А. В. Кузин. – М.: Академия, 2005. – 400 с.
5. Хрусталева З.А. Электрические и электронные измерения в задачах, вопросах и упражнениях: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / З.А. Хрусталева, С.В. Парфенов. – 3-е изд., стер. -М. Академия – 2015.