Задача 1.

Движение точки задано уравнениями $x(t)=2\sin^2\frac{\pi t}{2}-1(м)$, $y(t)=2\cos\frac{\pi t}{2}(м)$. Определить траекторию, скорость, полное ускорение, касательное и нормальное ускорение, радиус кривизны траектории для текущего момента t и для момента времени $t_1=0.5c$. Построить траекторию и показать все вычисленные кинематические характеристики для t_1.

Решение

Сначала определим траекторию движения точки:

$$\begin{cases}\sin^2\frac{\pi t}{2}=\frac{x+1}{2},\\ \cos^2\frac{\pi t}{2}=\left(\frac{y}{2}\right)^2.\end{cases}$$

Так как $\sin^2\frac{\pi t}{2}+\cos^2\frac{\pi t}{2}=1$, тогда

$$\frac{x+1}{2}+\frac{y^2}{4}=1,$$

или

$$x=1-\frac{y^2}{2}.$$

Это уравнение параболы относительно оси Ox (см. рис.).

При $t\in[0,+\infty)$: $\sin^2\frac{\pi t}{2}\in[0,1]$, $\cos\frac{\pi t}{2}\in[-1,1]$, и по этому:

$$-1\le x\le 1;\quad -2\le x\le 2.$$

Определим скорость точки по формулам:

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}=\pi\sin\pi t;$$

$$v_y(t)=\dot{y}(t)=-2\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}=-\pi\sin\frac{\pi t}{2};$$

$$v(t)=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(\pi\sin\pi t)^2+\left(-\pi\sin\frac{\pi t}{2}\right)^2}=\pi\sqrt{\sin^2\pi t+\sin^2\frac{\pi t}{2}}.$$

В момент времени $t_1=0.5c$:

$$v_x(0.5)=\pi\sin\frac{\pi}{2}=\pi\approx 3.14\left(\frac{м}{c}\right);$$

$$v_y(0.5)=-\pi\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\approx -2.22\left(\frac{м}{c}\right);$$

$$v(0.5)=\sqrt{(3.14)^2+(-2.22)^2}\approx 3.85\left(\frac{м}{c}\right).$$

Определим ускорение точки по формулам:

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=\pi^2\cos\pi t;$$

$$a_y(t)=\dot{v}_y(t)=-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2};$$

$$a(t)=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\left(\pi^2\cos\pi t\right)^2+\left(-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\right)^2}=\pi^2\sqrt{\cos^2\pi t+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi t}{2}}.$$

В момент времени $t_1=0.5c$:

$$a_x(0.5)=\pi^2\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$a_y(0.5)=-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\approx-3.49\left(\frac{м}{c^2}\right);$$

$$a(0.5)=\sqrt{0^2+(-3.49)^2}\approx 3.49\left(\frac{м}{c^2}\right).$$

Определим касательное ускорение:

$$a_\tau(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\pi\sqrt{\sin^2\pi t+\sin^2\frac{\pi t}{2}}\right)=$$

$$=\pi\frac{2\pi\sin\pi t\cos\pi t+\pi\sin(\pi t/2)\cos(\pi t/2)}{2\sqrt{\sin^2\pi t+\sin^2(\pi t/2)}}=\frac{\pi^2}{4}\frac{2\sin 2\pi t+\sin\pi t}{\sqrt{\sin^2\pi t+\sin^2(\pi t/2)}}.$$

В момент времени $t_1=0.5c$:

$$a_\tau(0.5)=\frac{\pi^2}{4}\frac{2\sin\pi+\sin(\pi/2)}{\sqrt{\left(\sin(\pi/2)\right)^2+\left(\sin(\pi/4)\right)^2}}=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\sqrt{1+1/2}}\approx 2.01\left(\frac{м}{c^2}\right).$$

Определим нормальное ускорение точки:

$$a_n(t)=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=$$

$$=\pi^2\sqrt{\cos^2\pi t+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{16}\frac{\left(2\sin 2\pi t+\sin\pi t\right)^2}{\sin^2\pi t+\sin^2(\pi t/2)}}.$$

В момент времени $t_1=0.5c$:

$$a_n(0.5)=\left.\sqrt{a^2-a_\tau^2}\right|_{t=0.5}=\sqrt{(3.49)^2-(2.01)^2}\approx 2.85\left(\frac{м}{c^2}\right).$$

Найдем радиус кривизны траектории по формуле:

$$\rho(t)=\frac{v^2(t)}{a_n(t)}=\frac{\sin^2\pi t+\sin^2\frac{\pi t}{2}}{\sqrt{\cos^2\pi t+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{16}\frac{\left(2\sin 2\pi t+\sin\pi t\right)^2}{\sin^2\pi t+\sin^2(\pi t/2)}}}.$$

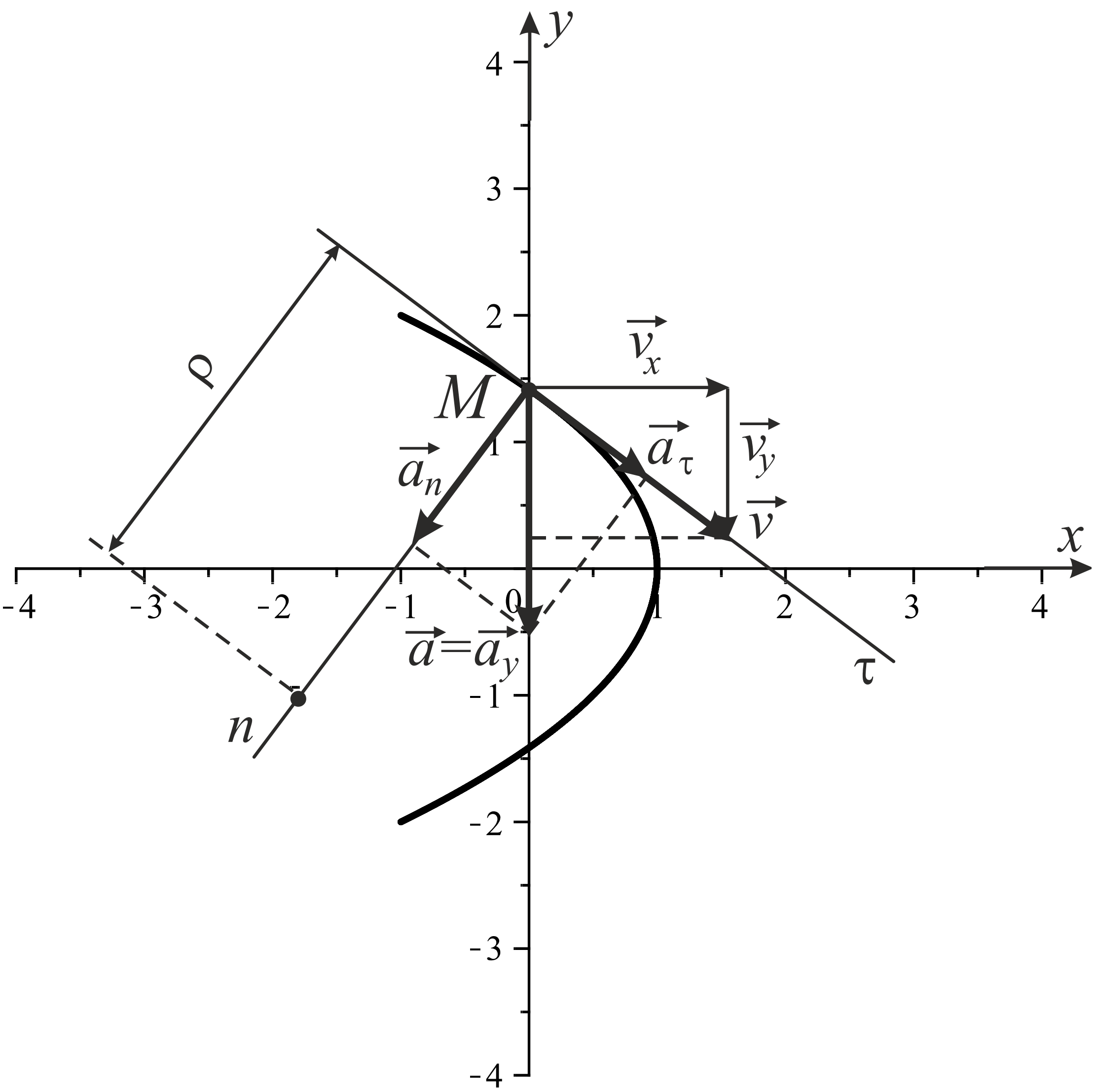
В момент времени $t_1=0.5c$:

$$\rho(0.5)=\left.\left(\frac{v^2}{a_n}\right)\right|_{t=0.5c}=\frac{(3.85)^2}{2.85}\approx 5.2(м).$$

Сделаем рисунок к задаче. Для этого определим еще координаты точки в момент времени $t_1=0.5c$:

$$x(0.5)=2\sin^2\frac{\pi}{4}-1\approx 2\cdot\frac{1}{2}-1=0(м);$$

$$y(0.5)=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.41(м).$$



Ответ: траектория парабола: $x = 1 - \dfrac{y^2}{2}$,

Скорость $v(0.5) = 3.85\frac{м}{с}$; $v(t) = \pi\sqrt{\sin^2 \pi t + \sin^2 \dfrac{\pi t}{2}}$.

Полное ускорение $a(0.5) = 3.49\frac{м}{с^2}$; $a(t) = \pi^2\sqrt{\cos^2 \pi t + \dfrac{1}{4}\cos^2 \dfrac{\pi t}{2}}$.

Касательное ускорение $a_\tau(0.5) = 2.01\frac{м}{с^2}$; $a_\tau(t) = \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{2\sin 2\pi t + \sin \pi t}{\sqrt{\sin^2 \pi t + \sin^2(\pi t/2)}}$.

Нормальное ускорение $a_n(0.5) = 2.85\frac{м}{с^2}$;

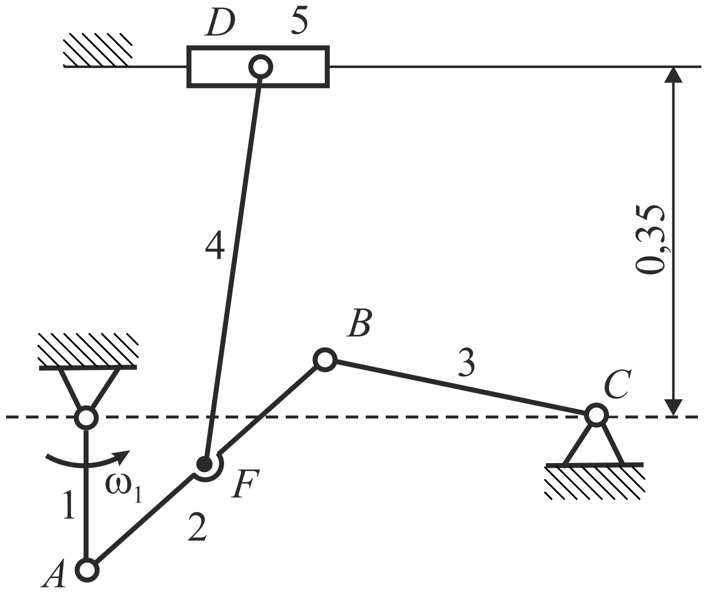
$$a_n(t) = \pi^2\sqrt{\cos^2 \pi t + \frac{1}{4}\cos^2 \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{16}\frac{(2\sin 2\pi t + \sin \pi t)^2}{\sin^2 \pi t + \sin^2(\pi t/2)}}.$$

Радиус кривизны траектории $\rho(0.5) = 5.2м$;

$$\rho(t) = \frac{\sin^2 \pi t + \sin^2 \dfrac{\pi t}{2}}{\sqrt{\cos^2 \pi t + \dfrac{1}{4}\cos^2 \dfrac{\pi t}{2} - \dfrac{1}{16}\dfrac{(2\sin 2\pi t + \sin \pi t)^2}{\sin^2 \pi t + \sin^2(\pi t/2)}}}.$$

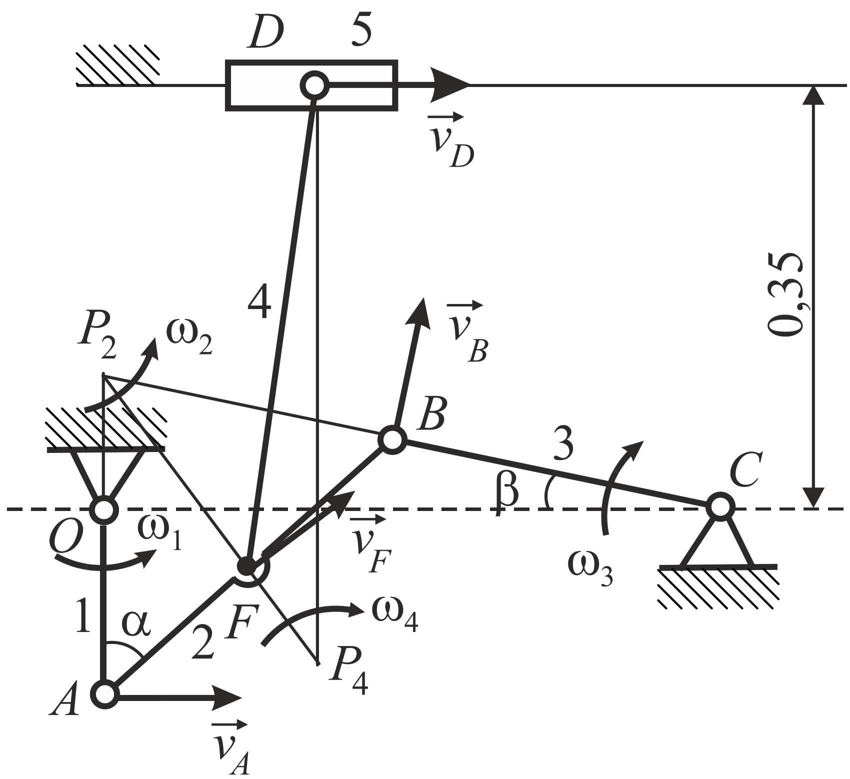
Задача 2

Для механизма, в изображенном на чертеже положении, определить скорость точек B, D, F, ускорение точек B, F, а также угловые скорости всех звеньев и угловое ускорение звена AB, если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 100c^{-1}$. Принять угол $\varphi = 270^O$, $OA = 0{,}14м$, $AB = 0{,}32м$, $BC = 0{,}28м$, $AF = FB = 0{,}16м$, $DF = 0{,}40м$, $OC = 0{,}50м$.



Решение

Определим сначала линейный скорости точек A, B, D, F и угловые скорости всех звеньев: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5.



С рисунка видим, что:

$$\begin{cases} AB\sin\alpha + BC\cos\beta = OC, \\ OA + BC\sin\beta = AB\cos\alpha, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0,32\sin\alpha + 0,28\cos\beta = 0,5, \\ 0,14 + 0,28\sin\beta = 0,32\cos\alpha. \end{cases}.$$

Тогда

$$\alpha = 0,81031 \text{ рад} \approx 46,43^O,$$

$$\beta = 0,29186 \text{ рад} \approx 16,72^O.$$

Точка движется A по окружности радиуса OA, тогда:

$$v_A = \omega_1 OA = 100 \cdot 0,14 = 14\left(м/с\right).$$

Точка движется B по окружности радиуса CB, тогда:

$$v_B = \omega_3 CB.$$

Откуда:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{CB}.$$

Проведем перпендикуляры к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, точка пересечения этих перпендикуляров P_2 будит мгновенным центром скоростей для звена 2 (звена AB). Тогда

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_F}{FP_2}.$$

С рисунка:

$$OP_2 = OC\,\mathrm{tg}\beta = 0,5\mathrm{tg}16,72^O \approx 0,15\left(м\right),$$

$$AP_2 = AO + OP_2 = 0,14 + 0,15 = 0,29\left(м\right).$$

Тогда

$$\omega_2 = \frac{14}{0,29} \approx 48,28\left(c^{-1}\right).$$

С рисунка видно, что:

$$CP_2 = \sqrt{OP_2^2 + OC^2} = \sqrt{0,15^2 + 0,5^2} \approx 0,52\left(м\right),$$

$$BP_2 = CP_2 - BC = 0,52 - 0,28 = 0,24\left(м\right).$$

Тогда

$$v_B = \omega_2 BP_2 = 48,28 \cdot 0,24 = 11,59\left(м/с\right),$$

$$\omega_3 = \frac{11,59}{0,28} = 41,39\left(c^{-1}\right).$$

С рисунка видно, что:

$$FP_2 = \sqrt{P_2A^2 + AF^2 - 2P_2A \cdot AF \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{0,29^2 + 0,16^2 - 2 \cdot 0,29 \cdot 0,16\cos 46,43^O} \approx 0,21\left(м\right).$$

Тогда

$$v_F = \omega_2 FP_2 = 48,28 \cdot 0,21 \approx 10,13\left(м/с\right).$$

Проведем перпендикуляры к скоростям $\vec{v}_F$ и $\vec{v}_D$, точка пересечения этих перпендикуляров P_4 будит мгновенным центром скоростей для звена 4 (звена FD). Тогда

$$\omega_4 = \frac{v_F}{FP_4} = \frac{v_D}{DP_4}.$$

Тогда

$$\omega_4 = \frac{v_F}{FP_4} = \frac{10,13}{0,097} \approx 104,43\left(c^{-1}\right),$$

$$v_D = DP_4\omega_4 = 0.47 \cdot 104,43 \approx 49.08\left(м/с\right).$$

Точка движется A по окружности радиуса OA, тогда:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n},$$

где $a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0$, так как $\omega_{OA} = \omega_1 = const$,

$$a_A^n = \omega_1^2 OA = 100^2 \cdot 0,14 = 1400\left(м/с^2\right).$$

Точка движется B по окружности радиуса CB, тогда:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_B^{n},$$

где

$$a_B^{\tau} = \varepsilon_{CB} \cdot CB = 0,28\varepsilon_2,$$

$$a_B^n = \omega_3^2 CB = 41,39^2 \cdot 0,28 = 479,68\left(м/с^2\right).$$

Запишем векторную формулу для связи ускорений точек A и B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n},$$

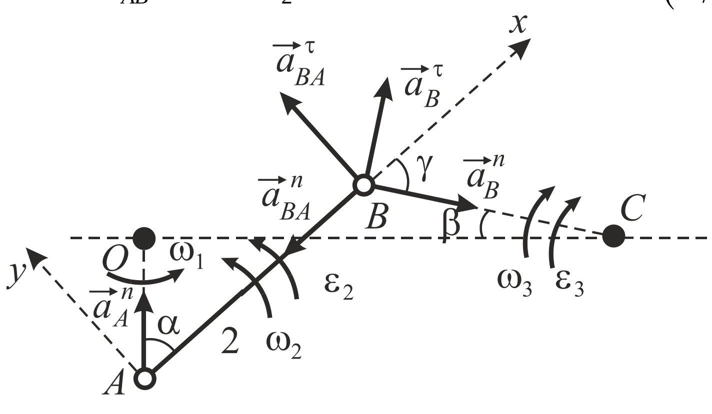
или

$$\vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_B^{n} = \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}, \qquad (1)$$

где

$$a_{BA}^{\tau} = AB \cdot \varepsilon_{AB} = AB \cdot \varepsilon_2 = 0,32\varepsilon_2,$$

$$a_{BA}^{n} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = AB \cdot \omega_2^2 = 0,32 \cdot 48,28^2 \approx 745,91\left(м/с^2\right).$$



С рисунка видно, что $\gamma = 90^O - \alpha + \beta = 90^O - 46,43^O + 16,72^O = 60,29^O$.

Запишем проекции (1) на оси Ax и Ay:

$$\begin{cases} a_B^{\tau}\sin\gamma + a_B^n\cos\gamma = a_A^n\cos\alpha - a_{BA}^n, \\ a_B^{\tau}\cos\gamma - a_B^n\sin\gamma = a_A^n\sin\alpha + a_{BA}^{\tau}. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда

$$a_B^{\tau} = \left(a_A^n\cos\alpha - a_{BA}^n - a_B^n\cos\gamma\right)/\sin\gamma =$$

$$=\left(1400\cos 46,43^O-745,91-479,68\cos 60,29^O\right)/\sin 60,29^O\approx -21,45\left(м/c^2\right).$$

$$\varepsilon_3=-\frac{21,45}{0,28}\approx -76,71\left(c^{-2}\right).$$

Знак «–» указывает, что реальное угловое ускорение направлено в противоположную сторону к тому, которое нарисовано на рисунке.

С второго уравнения (2):

$$a_{BA}^{\tau}=a_B^{\tau}\cos\gamma-a_B^n\sin\gamma-a_A^n\sin\alpha=$$

$$=-21,45\cos 60,29^O-479,68\sin 60,29^O-1400\sin 46,43^O\approx -1441,58\left(м/c^2\right).$$

Тогда

$$\varepsilon_{AB}=\varepsilon_2=\frac{a_{BA}^{\tau}}{0,32}=-\frac{1441,58}{0,32}\approx -4504,93\left(c^{-2}\right).$$

Знак «–» указывает, что реальное угловое ускорение направлено в противоположную сторону к тому, которое нарисовано на рисунке.

Тогда ускорение точки B:

$$a_B=\sqrt{\left(a_B^{\tau}\right)^2+\left(a_B^n\right)^2}=\sqrt{\left(-21,45\right)^2+479,68^2}\approx 480,16\left(м/c^2\right).$$

Теперь найдем ускорение точки F:

$$\vec{a}_F=\vec{a}_A+\vec{a}_{FA}^{\tau}+\vec{a}_{FA}^n,$$

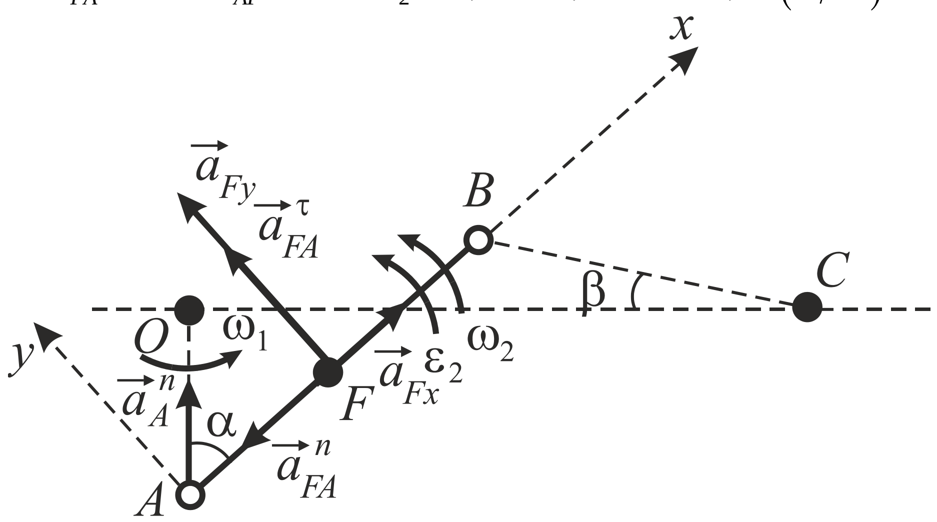
или

$$\vec{a}_F=\vec{a}_A^n+\vec{a}_{FA}^{\tau}+\vec{a}_{FA}^n, \tag{3}$$

где

$$a_{FA}^{\tau}=AF\cdot\varepsilon_{AF}=AF\cdot\varepsilon_2=-0,16\cdot 4504,93\approx -720,79\left(м/c^2\right),$$

$$a_{FA}^n=AF\cdot\omega_{AF}^2=AF\cdot\omega_2^2=0,16\cdot 48,28^2\approx 372,95\left(м/c^2\right).$$



Запишем проекции (3) на оси Ax и Ay:

$$\begin{cases} a_{Fx}=a_A^n\cos\alpha-a_{FA}^n, \\ a_{Fy}=a_A^n\sin\alpha+a_{FA}^{\tau}. \end{cases}$$

Тогда

$$a_{Fx}=a_A^n\cos\alpha-a_{FA}^n=1400\cos 46,43^O-372,95=592.03\left(м/c^2\right),$$

$$a_{Fy} = 1400 \sin 46,43^{O} - 720,79 = 293,51 \left(м/с^2 \right),$$

$$a_F = \sqrt{a_{Fx}^2 + a_{Fy}^2} = \sqrt{592.03^2 + 293,51^2} \approx 660,80 \left(м/с^2 \right).$$

Ответ:

$v_B = 11,59\, м/с$,

$v_F = 10,13\, м/с$,

$v_D = 49.08\, м/с$,

$\omega_2 = 48,28 с^{-1}$,

$\omega_3 = 41,39 с^{-1}$,

$\omega_4 = 104,43 с^{-1}$,

$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_2 = -4504,93 с^{-2}$,

$\varepsilon_3 = -76,71 с^{-2}$,

$a_B = 480,16\, м/с^2$,

$a_F = 660,80\, м/с^2$.

Задача 3

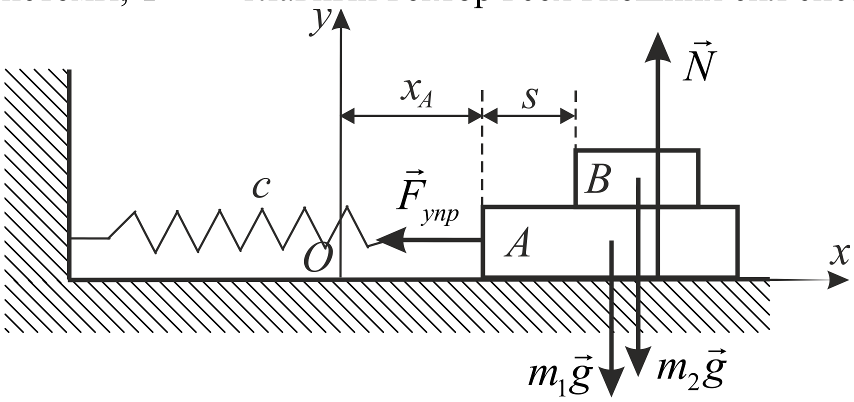
Тело A массой m_1 удерживается на гладкой горизонтальной плоскости пружиной жесткости c. По телу A движется тело B массой m_2, закон относительного движения которого $s = l\cos\omega t$. В начальный момент пружина не напряжена и тело A находится в покое. Определить движение тела A, если $l, \omega = const$.

Решение

Для решения этой задачи используем теорему о движении центра масс системы материальный точек:

$$M\vec{a}_C = \vec{F}^{(e)}, \tag{1}$$

где $M-$ масса системы, $C-$ точка центра масс системы, $\vec{a}_C-$ ускорение центра масс системы, $\vec{F}^{(e)}-$ главный вектор всех внешних сил системы.



На нашу систему с тел A и B действуют:

– $m_1\vec{g}-$ сила тяжести тела A;

– $m_2\vec{g}-$ сила тяжести тела B;

– $\vec{N}-$ нормальная реакция гладкой (тогда $F_{mp} = 0$) горизонтальной плоскости;

– $\vec{F}_{ynp}-$ сила упругости пружины жесткости c, которая согласно закону Гука вычисляется по формуле:

$$F_{ynp} = c\Delta l,$$

где $\Delta l-$ деформация пружины.

Тогда (1) перепишем в виде:

$$(m_1 + m_2)\vec{a}_C = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{ynp}. \tag{2}$$

Выберем декартовую систему координат Oxy, так, чтобы ее центр O совпадал с положением недеформированной пружины. Тогда

$$\Delta l = x_A(t) \text{ и } x_A(0) = 0.$$

Запишем проекцию уравнения (2) на ось Ox:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_C = -F_{ynp}. \tag{3}$$

Так как механическая система состоит с тел A и B, тогда ее координату центра масс x_C вычислим по формуле:

$$x_C = \frac{m_1 x_A + m_2 x_B}{m_1 + m_2}.$$

Отметим, что так как тело B движется по телу A согласно уравнению $s = l\cos\omega t$, и движется еще и вместе с телом A, тогда:

$$x_B = x_A + s = x_A + l\cos\omega t .$$

Тогда

$$x_C = \frac{m_1 x_A + m_2\left(x_A + l\cos\omega t\right)}{m_1 + m_2} = x_A + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\cos\omega t .$$

Найдем вторую производную по времени t от x_C:

$$\ddot{x}_C = \ddot{x}_A - \frac{m_2 l\omega^2}{m_1 + m_2}\cos\omega t .$$

Тогда (3) перепишем в виде:

$$\left(m_1 + m_2\right)\left(\ddot{x}_A - \frac{m_2 l\omega^2}{m_1 + m_2}\cos\omega t\right) = -c x_A ,$$

или

$$\ddot{x}_A + \frac{c}{m_1 + m_2}x_A = \frac{m_2 l\omega^2}{m_1 + m_2}\cos\omega t .$$

Пусть $k = \sqrt{\dfrac{c}{m_1 + m_2}}$, тогда

$$\ddot{x}_A + k^2 x_A = \frac{m_2 l\omega^2}{m_1 + m_2}\cos\omega t . \qquad (4)$$

Уравнение (4) это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Так как в начальный момент времени тело A находилось в покое, тогда его скорость была равна нулю:

$$\dot{x}_A\left(0\right) = 0, \qquad (5)$$

и начало координат мы выбрали в положении недеформированной пружины, тогда

$$x_A\left(0\right) = 0. \qquad (6)$$

Найдем решение (4). Сначала решим однородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_A + k^2 x_A = 0 .$$

Эго решение:

$$x_A^{(одн)}\left(t\right) = c_1\cos kt + c_2\sin kt ,$$

где $c_1, c_2 -$ постоянные, которые мы найдем позже с начальных условий.

Найдем частичное решение дифференциального уравнения (4). Возможны два случая:

1). $\omega \ne k$;

2). $\omega = k$.

Рассмотрим сначала первый случай: $\omega \ne k$. Тогда

$$x_A^{(част)}\left(t\right) = N\cos\omega t + M\sin\omega t ,$$

где $N, M -$ постоянные.

Тогда

$$\dot{x}_A^{(част)}\left(t\right) = -\omega N\sin\omega t + \omega M\cos\omega t ,$$

$$\ddot{x}_A^{(част)}(t) = -\omega^2 N\cos\omega t - \omega^2 M\sin\omega t.$$

С (4) будем иметь:

$$-\omega^2 N\cos\omega t - \omega^2 M\sin\omega t + k^2\left(N\cos\omega t + M\sin\omega t\right) = \frac{m_2 l\omega^2}{m_1+m_2}\cos\omega t.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} -\omega^2 N + k^2 N = \dfrac{m_2 l\omega^2}{m_1+m_2}, \\ -\omega^2 M + k^2 M = 0. \end{cases}$$

Тогда $M = 0$, $N = \dfrac{1}{k^2-\omega^2}\dfrac{m_2 l\omega^2}{m_1+m_2}$, и

$$x_A^{(част)}(t) = \frac{1}{k^2-\omega^2}\frac{m_2 l\omega^2}{m_1+m_2}\cos\omega t.$$

Тогда

$$x_A(t) = x_A^{(одн)}(t) + x_A^{(част)}(t) = c_1\cos kt + c_2\sin kt + \frac{\omega^2}{k^2-\omega^2}\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\cos\omega t.$$

$$\dot{x}_A(t) = -c_1 k\sin kt + c_2 k\cos kt - \frac{\omega^3}{k^2-\omega^2}\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\omega t.$$

Определим постоянные c_1, c_2 с условий (5) и (6):

$$\begin{cases} 0 = c_2 k, \\ 0 = c_1 + \dfrac{\omega^2}{k^2-\omega^2}\dfrac{m_2 l}{m_1+m_2}. \end{cases}$$

Тогда:

$$c_1 = -\frac{\omega^2}{k^2-\omega^2}\frac{m_2 l}{m_1+m_2}, c_2 = 0.$$

Окончательно

$$x_A(t) = \frac{\omega^2}{k^2-\omega^2}\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left(\cos\omega t - \cos kt\right).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\omega = k$. Тогда

$$x_A^{(част)}(t) = \left(N\cos\omega t + M\sin\omega t\right)t,$$

где N, M – постоянные.

Тогда

$$\dot{x}_A^{(част)}(t) = N\cos\omega t + M\sin\omega t + \left(-\omega N\sin\omega t + \omega M\cos\omega t\right)t,$$

$$\ddot{x}_A^{(част)}(t) = -2\omega N\sin\omega t + 2\omega M\cos\omega t + \left(-\omega^2 N\cos\omega t - \omega^2 M\sin\omega t\right)t.$$

С (4) будем иметь:

$$-2\omega N\sin\omega t + 2\omega M\cos\omega t - \omega^2 Nt\cos\omega t - \omega^2 Mt\sin\omega t +$$
$$+\omega^2 tN\cos\omega t + \omega^2 tM\sin\omega t = \frac{m_2 l\omega^2}{m_1+m_2}\cos\omega t.$$

Тогда $N = 0$, $M = \dfrac{m_2 l\omega}{2\left(m_1+m_2\right)}$, и

$$x_A^{(част)}(t)=\frac{m_2 l\omega}{2(m_1+m_2)}t\sin\omega t.$$

Тогда

$$x_A(t)=x_A^{(одн)}(t)+x_A^{(част)}(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\frac{m_2 l\omega}{2(m_1+m_2)}t\sin\omega t.$$

$$\dot{x}_A(t)=-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t+\frac{m_2 l\omega}{2(m_1+m_2)}\sin\omega t+\frac{m_2 l\omega^2}{2(m_1+m_2)}t\cos\omega t.$$

Определим постоянные c_1, c_2 с условий (5) и (6):

$$\begin{cases}0=c_2\omega,\\ 0=c_1.\end{cases}$$

Тогда $c_1=0$, $c_2=0$ и

$$x_A(t)=\frac{m_2 l\omega t}{2(m_1+m_2)}\sin\omega t.$$

Ответ: $x_A(t)=\begin{cases}\dfrac{\omega^2}{k^2-\omega^2}\dfrac{m_2 l}{m_1+m_2}(\cos\omega t-\cos kt), k\neq\omega,\\ \dfrac{m_2 l\omega t}{2(m_1+m_2)}\sin\omega t, k=\omega,\end{cases}$

где $k=\sqrt{\dfrac{c}{m_1+m_2}}$.

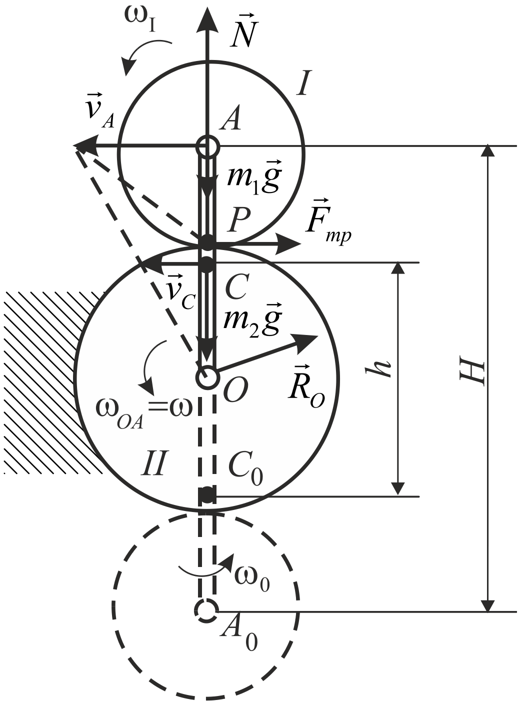
Задание 4

Колесо I массой m_1 приводится в движение кривошипом OA длинной l, при этом оно катится без скольжения по неподвижному колесу II. Масса кривошипа равна m_2. Колесо I считать сплошным однородным круглым диском, а кривошип – однородным тонким стержнем. Трением в подшипниках пренебречь. Определить угловую скорость, которую надо сообщить кривошипу, чтобы он повернулся из нижнего положения равновесия на угол 180^O, если механизм расположен в вертикальной плоскости.

Решение

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек в интегральном виде:

$$T - T_0 = A^{(e)}, \qquad (1)$$



где T – кинетическая энергия механической системы, $A^{(e)}$ – работа всех внешних сил, приложенных к системе.

Так как наша система включает колесо I и кривошип OA, тогда:

$$T = T_I + T_{OA},$$

где T_I – кинетическая энергия колеса I, T_{OA} – кинетическая энергия кривошипа OA.

Так как кривошип OA и колесо I движутся плоскопараллельно, тогда:

$$T_{OA} = \frac{m_2 v_C^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega_{OA}^2,$$

$$T_I = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Az} \omega_I^2,$$

где v_C – скорость центра масс C кривошипа OA, $\omega_{OA} = \omega$ – угловая скорость кривошипа OA, J_{Cz} – момент инерции кривошипа OA, относительно оси, которая проходит через центр масс C кривошипа OA перпендикулярно плоскости рисунка, v_A – скорость центра масс A колеса I, ω_I – угловая скорость колеса I, J_{Az} – момент инерции кривошипа OA, относительно оси, которая проходит через центр масс A колеса I перпендикулярно плоскости рисунка.

Так как колесо I считать сплошным однородным круглым диском, тогда

$$J_{Az} = \frac{m_1 r^2}{2},$$

где r – радиус колеса I; а кривошип OA – однородный тонкий стержень, тогда

$$J_{Cz} = \frac{m_2 l^2}{12}.$$

Отметим, что центра масс C кривошипа OA движется по окружности радиуса $OC = \dfrac{l}{2}$, тогда

$$v_C = OC \cdot \omega_{OA} = \frac{l\omega}{2}.$$

Тогда

$$T_{OA} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 l^2}{12}\omega^2 = \frac{m_2 l^2 \omega^2}{6}.$$

Точка A движется по окружности радиуса $OA = l$, тогда

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = l\omega.$$

Так как колесо I катится без скольжения по неподвижному колесу II, тогда точка $P -$ мгновенный центр скоростей для колеса I, то этому:

$$\omega_I = \frac{v_A}{r} = \frac{l\omega}{r}.$$

Тогда

$$T_I = \frac{m_1 (l\omega)^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\left(\frac{l\omega}{r}\right)^2 = \frac{3m_1 l^2 \omega^2}{4}.$$

Запишем кинетическую энергию механической системы:

$$T = \frac{3m_1 l^2 \omega^2}{4} + \frac{m_2 l^2 \omega^2}{6} = \frac{l^2 \omega^2}{12}(9m_1 + 2m_2). \tag{2}$$

Так как в начальный момент времени $t = 0$ угловая скорость $\omega(0) = \omega_0$, тогда

$$T_0 = \frac{l^2 \omega_0^2}{12}(9m_1 + 2m_2).$$

На систему действуют следующие силы:
– $m_1\vec{g} -$ сила тяжести колеса I;
– $m_2\vec{g} -$ сила тяжести кривошипа OA;
– $\vec{R}_O -$ реакция вязи в точке O;
– $\vec{N} -$ нормальная реакция неподвижного колеса II на подвижное колесо I;
– $\vec{F}_{тр} -$ сила трения между неподвижным колесом II на подвижным колесом I.

Тогда

$$A^{(e)} = A(m_1\vec{g}) + A(m_2\vec{g}) + A(\vec{R}_O) + A(\vec{N}) + A(\vec{F}_{тр}).$$

Так как $\vec{R}_O$ приложена в неподвижной точке O, тогда

$$A(\vec{R}_O) = 0,$$

силы $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$ приложены в мгновенном центре скоростей P, тогда

$$A(\vec{F}_{тр}) = 0,\ A(\vec{N}) = 0.$$

Как видим с рисунка, если кривошип повернулся из нижнего положения равновесия на угол 180^O, тогда точка C поднялась на высоту $h = l$, а точка A поднялась на высоту $H = 2l$, тогда

$$A(m_2\vec{g}) = -m_2 gh = -m_2 gl,$$

$$A(m_1\vec{g}) = -m_1 gH = -2m_1 gl.$$

Тогда

$$A^{(e)} = -m_2 gl - 2m_1 gl = -(m_2 + 2m_1) gl.$$

Если кривошип повернулся из нижнего положения равновесия на угол 180^{O}, тогда в этом положении $\omega = 0$ и

$$T = 0.$$

С формулы (1) запишем:

$$-\frac{l^2\omega_0^2}{12}\left(9m_1 + 2m_2\right) = -\left(m_2 + 2m_1\right)gl,$$

откуда

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{3g\left(m_2 + 2m_1\right)}{l\left(2m_2 + 9m_1\right)}}.$$

Ответ: $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{3g\left(m_2 + 2m_1\right)}{l\left(2m_2 + 9m_1\right)}} \quad \left(\frac{1}{c}\right).$