Задача 1. Равновесие плоской сходящейся системы сил

Дано: кронштейн, показанный на рис. 1 *а*). Он состоит из двух невесомых стержней. Внешняя нагрузка (сила $P_E = 300H$) передается к точке *C* через трос, который проходит через неподвижный блок *D*. Этот блок не изменяет модуль силы, а изменяет только ее направление; $\alpha = 60^O$, $\beta = 30^O$, $\gamma = 90^O$.

Определить: реакции стержней.

Решение:

Изображаем внешнюю силу P_E, натяжение троса T и реакции невесомых стержней R_A и R_B (рис. 1, *б*). Вектора их направим от точки *C*, то есть предполагаем, что стержни растянуты. Так как трос нерастяжимый, тогда $T = P_E = 300H$.

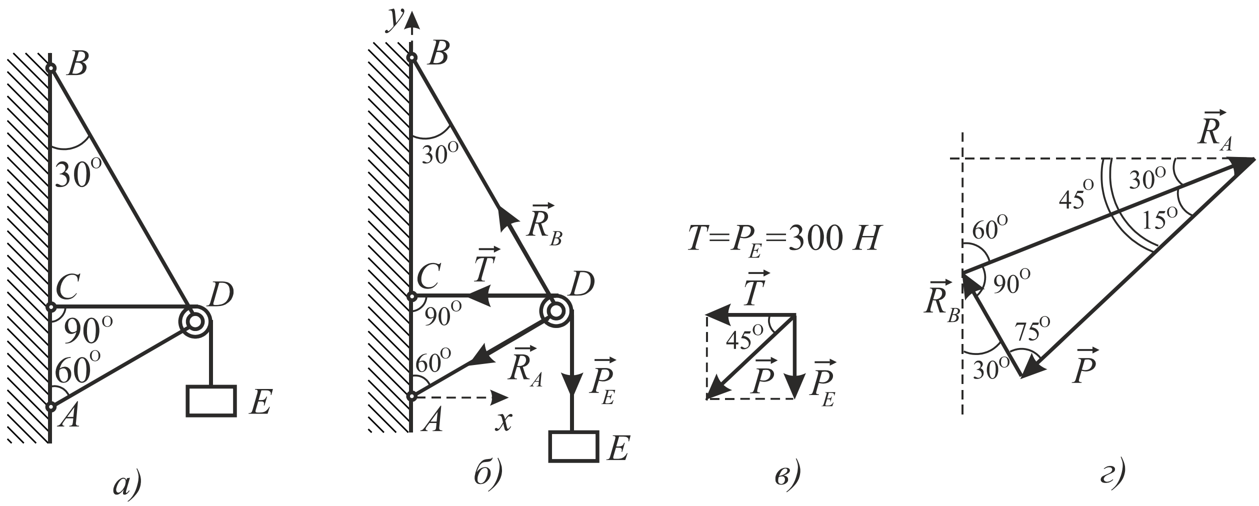

Рис. 1.

а) Аналитическое решение. Оси координат показаны на рис. 1 *б*). Составим уравнения проекций.

$$\sum X_i = 0; \quad -R_A \sin 60° - R_B \sin 30° - T = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P_E - R_A \cos 60° + R_B \cos 30° = 0.$$

Отсюда:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} R_A - \frac{1}{2} R_B - 300 = 0,$$

$$-300 - \frac{1}{2} R_A + \frac{\sqrt{3}}{2} R_B = 0.$$

Тогда:

$$R_B = -600 - \sqrt{3}R_A,$$

$$-300 - \frac{1}{2}R_A + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-600 - \sqrt{3}R_A\right) = 0 \Rightarrow -300 - \frac{1}{2}R_A - 300\sqrt{3} - \frac{3}{2}R_A = 0\,.$$

Отсюда находим:

$$2R_A = -300\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow R_A = -150\left(1+\sqrt{3}\right) \approx -409{,}81\left(H\right),$$

$$R_B = -600 + 150\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right) = 150\left(\sqrt{3}-1\right) \approx 109{,}81\left(H\right).$$

Таким образом, стержень BC растянут, AC – сжат.

<u>б) Геометрическое решение.</u>

Сначала вычислим векторную сумму известных сил P_E и T (рис. 1 *в*):

$$\vec{P} = \vec{T} + \vec{P}_E;\ P = \sqrt{T^2 + P_E^2} = \sqrt{300^2 + 300^2} = 300\sqrt{2}\left(H\right).$$

Рассмотрим силовой треугольник (рис. 1 *г*), все стороны которого параллельны силам и реакциям, показанным на рис. 1 *б*. Из этого треугольника видно, что реакция R_B направлена от точки C (стержень растянут), а реакция R_A – к точке C (стержень сжат).

Так как силовой треугольник – прямоугольный, тогда:

$$R_A = P\sin 75^{\mathrm{O}} = 300\sqrt{2}\sin 75^{\mathrm{O}} \approx 409{,}81\left(H\right),$$

$$R_B = P\cos 75^{\mathrm{O}} = 300\sqrt{2}\cos 75^{\mathrm{O}} \approx 109{,}81\left(H\right).$$

Ответ: $R_A = 409{,}81\left(H\right);\ R_B = 109{,}81\left(H\right)$**.**

Задача 2. Равновесие произвольной плоской системы сил

Для конструкции, изображенной на рис. 2 *а*), и исходных данных

№ п/п	a	b	c	d	α	β	F, Н	M, Н·м	q, Н/м
	м				град				
8	0,5	1	0,5	0,35	30	60	450	5,5	400

определить опорные реакции.

Решение:

Заменим распределенную нагрузку равнодействующей силой

$$Q = q \cdot 0{,}5 = 400 \cdot 0{,}5 = 200\ (H).$$

Отбросим связи в точке A (цилиндрический шарнир) и в точке B (каток) и заменим их реакциями $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$ соответственно (рис. 2, *б*).

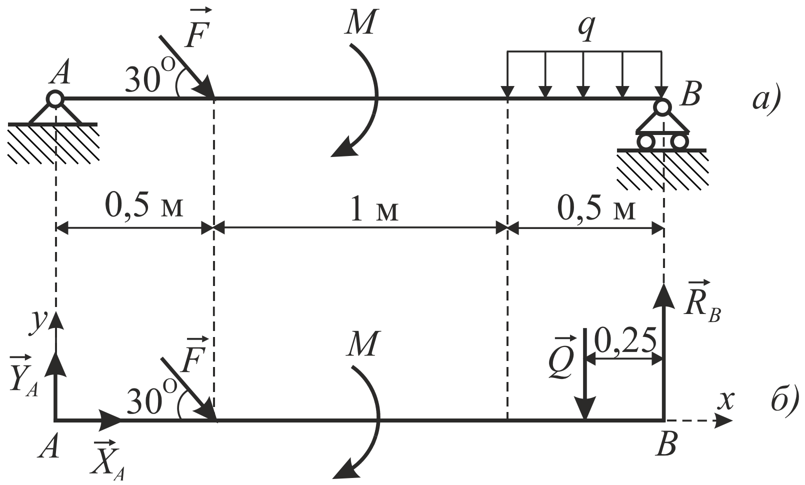

Рис. 2.

а) Аналитический способ

Составим уравнения равновесия (рис. 2 *б*):

$$\sum X_i = 0; \qquad X_A + F\cos 30^{O} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - F\sin 30^{O} - Q + R_B = 0;$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad -F \cdot 0{,}5 \cdot \sin 30^{O} - M - Q \cdot 1{,}75 + R_B \cdot 2 = 0.$$

За центр моментов при составлении третьего уравнения принимаем точку A, так как в ней приложены две неизвестные силы. Сосредоточенный момент входит только в уравнение моментов.

Решаем уравнения равновесия и находим реакции:

$$R_B = \frac{1}{2}\left(F \cdot 0,5 \cdot \sin 30^{\mathrm{O}} + M + Q \cdot 1,75\right) = \frac{1}{2}\left(450 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5,5 + 200 \cdot 1,75\right) = 234(H),$$

$$X_A = -F\cos 30^{\mathrm{O}} = -450\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -389,81(H),$$

$$Y_A = Q + F\sin 30^{\mathrm{O}} - R_B = 200 + 450 \cdot \frac{1}{2} - 234 = 191(H).$$

Реакции положительны Y_A и R_B, значит их направление на рис. 2, *б*) показаны правильно. Реакция X_A получилась со знаком "$-$", значит она будет направлена в противоположную сторону.

Для проверки правильности решения можно составить уравнения моментов относительно точки B:

$$\sum m_B(\vec{F_i}) = 0; \quad Q \cdot 0,25 - Y_A \cdot 2 + F \cdot 1,5 \cdot \sin 30^\circ - M = 0.$$

После подстановки значений всех сил и реакций это уравнение должно обратиться в тождество:

$$200 \cdot 0,25 - 191 \cdot 2 + 450 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2} - 5,5 = 0.$$

Ответ: $X_A = -389,81(H)$, $Y_A = 191(H)$, $R_B = 234(H)$.

Задача 3. Равновесие плоской сочлененной системы тел

Для сочлененной конструкции тел, приведенной на рис. 3 *а*), и исходных данных

№ п/п	*a*, м	*h*, м	α, град	*F*, Н	*M*, Н·м	*q*, Н/м	q_m, Н/м
8	0,95	0,80	30	500	16	300	1000

определить опорные реакции и реакции в промежуточном шарнире *C*.

Решение

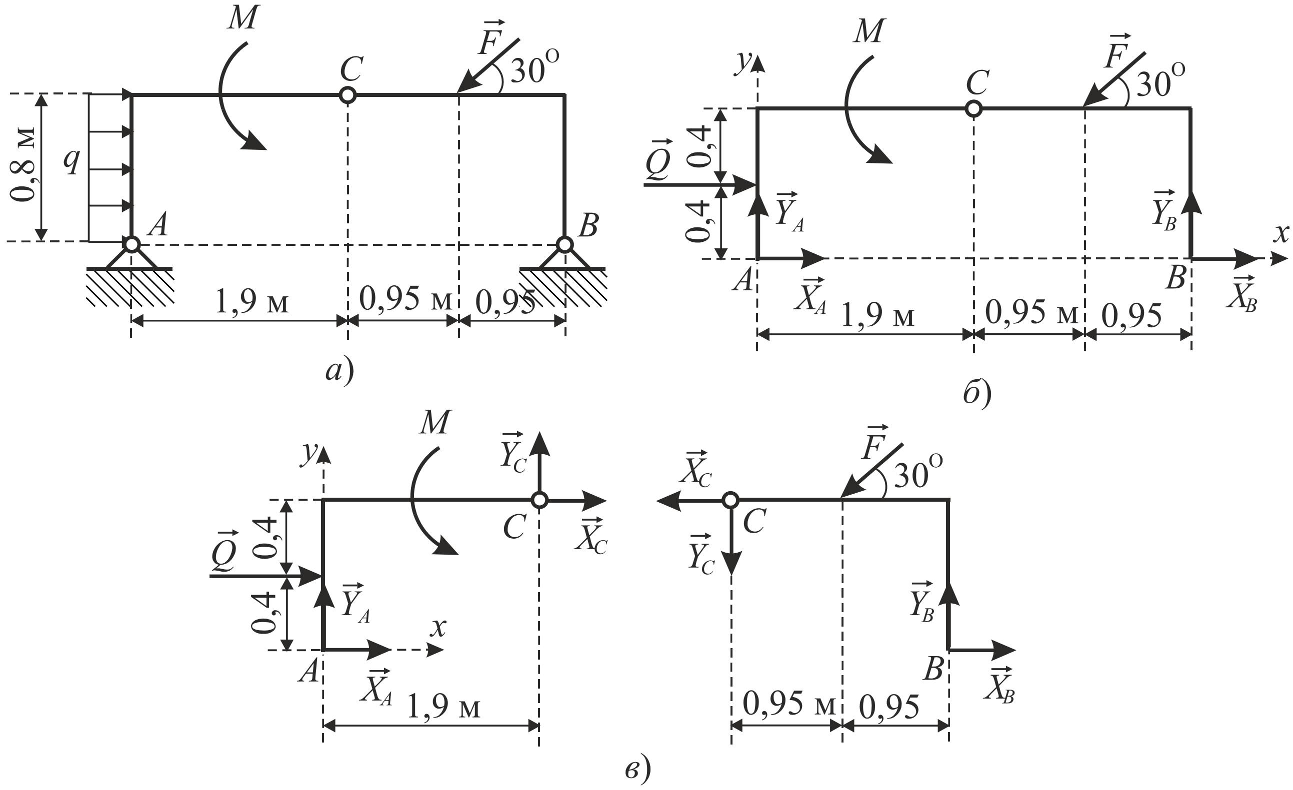

Рис. 3.

Нагрузку интенсивностью q, распределенную по закону прямоугольника, заменим силой

$$Q = q \cdot h = 300 \cdot 0{,}8 = 240\,(H).$$

Она приложена в центре тяжести прямоугольника.

Отбросим опоры *A, B, C* и заменим их реакциями (рис. 3, *б*).

На балку *ACB* действует произвольная плоская система сил, для которой можно составить только три уравнения равновесия. Неизвестных реакций – четыре. Чтобы сделать задачу статически определимой, разрежем балку на две части по шарниру *C* (рис. 3, *в*). Всего теперь имеем 6 реакций. Для каждой части можно составить три уравнения равновесия, то есть задача становится статически определимой.

а) Аналитическое решение

Составляем уравнения равновесия:

для всей балки *ACB* (рис. 3, *б*)

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B + Q - F\cos 30° = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B - F\sin 30° = 0; \tag{2}$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -Q\cdot 0{,}4 + M + F\cdot 0{,}8\cdot\cos 30° - F\cdot 2{,}85\cdot\sin 30° + Y_B\cdot 3{,}8 = 0; \tag{3}$$

для левой части *AC* (рис. 3, *в*)

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_C + Q = 0; \tag{4}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_C = 0; \tag{5}$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad -Q\cdot 0{,}4 + M + Y_C\cdot 1{,}9 - X_C\cdot 0{,}8 = 0; \tag{6}$$

для правой части *CB* (рис. 3, *в*)

$$\sum X_i = 0; \quad -X_C - F\cos 30° + X_B = 0; \tag{7}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_C + Y_B - F\sin 30° = 0; \tag{8}$$

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \qquad F\cdot 0{,}95\cdot\sin 30° + F\cdot 0{,}8\cdot\cos 30° + Y_C\cdot 1{,}9 + X_C\cdot 0{,}95 = 0. \tag{9}$$

Уравнения (4)-(9) используем для определения реакций, а уравнения (1)-(3) – для проверки.

Найдем решение этой системы уравнений:

$$(6) \Rightarrow X_C = \frac{1}{0{,}8}\left(-Q\cdot 0{,}4 + M + Y_C\cdot 1{,}9\right) = \frac{-240\cdot 0{,}4 + 16 + Y_C\cdot 1{,}9}{0{,}8} = -100 + 2{,}375Y_C.$$

$$(9) \Rightarrow 500\cdot 0{,}95\cdot\frac{1}{2} + 500\cdot 0{,}8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + Y_C\cdot 1{,}9 + 0{,}95\cdot\left(-100 + 2{,}375Y_C\right) = 0,$$

$$Y_C = \frac{0{,}95\cdot 100 - 250\cdot 0{,}95 - 250\cdot 0{,}8\cdot\sqrt{3}}{1{,}9 + 0{,}95\cdot 2{,}375} \approx -117{,}63(H),$$

$$X_C = -100 - 2{,}375\cdot 117{,}63 \approx -379{,}37(H).$$

Тогда:

$$(4) \Rightarrow X_A = -X_C - Q = 379{,}37 - 240 = 139{,}37(H),$$

$$(5) \Rightarrow Y_A = -Y_C = 117,63(H),$$

$$(7) \Rightarrow X_B = X_C + F\cos 30° = -379,37 + 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 53,64(H),$$

$$(8) \Rightarrow Y_B = Y_C + F\sin 30° = -117,63 + 500 \cdot \frac{1}{2} = 132,37(H).$$

Аналитическая проверка.

Подставляем найденные значения в уравнения (1)-(3):

$$X_A + X_B + Q - F\cos 30° = 139,37 + 53,64 + 240 - 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0;$$

$$Y_A + Y_B - F\sin 30° = 0; = 117,63 + 132,37 - 500 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$-Q \cdot 0,4 + M + F \cdot 0,8 \cdot \cos 30° - F \cdot 2,85 \cdot \sin 30° + Y_B \cdot 3,8 =$$

$$= -240 \cdot 0,4 + 16 + 500 \cdot 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 500 \cdot 2,85 \cdot \frac{1}{2} + 132,37 \cdot 3,8 \approx 0.$$

Так как все уравнения системы (1) обратились в тождество, равное нулю, то все неизвестные силы определены правильно.

Ответ: $X_A = 139,37(H)$, $Y_A = 117,63(H)$, $X_B = 53,64(H)$, $Y_B = 132,37(H)$, $X_C = -379,37(H)$, $Y_C = -117,63(H)$.

Задача 4. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Для пространственной конструкции, схема которой дана на рис. 4 *а*), а исходные данные –

№ п/п	Q	T	G	a	b	c	d	R	r	α, град
	кН			см						
8	20	8	10	35	20	30	25	40	20	60

определить опорные реакции.

Решение

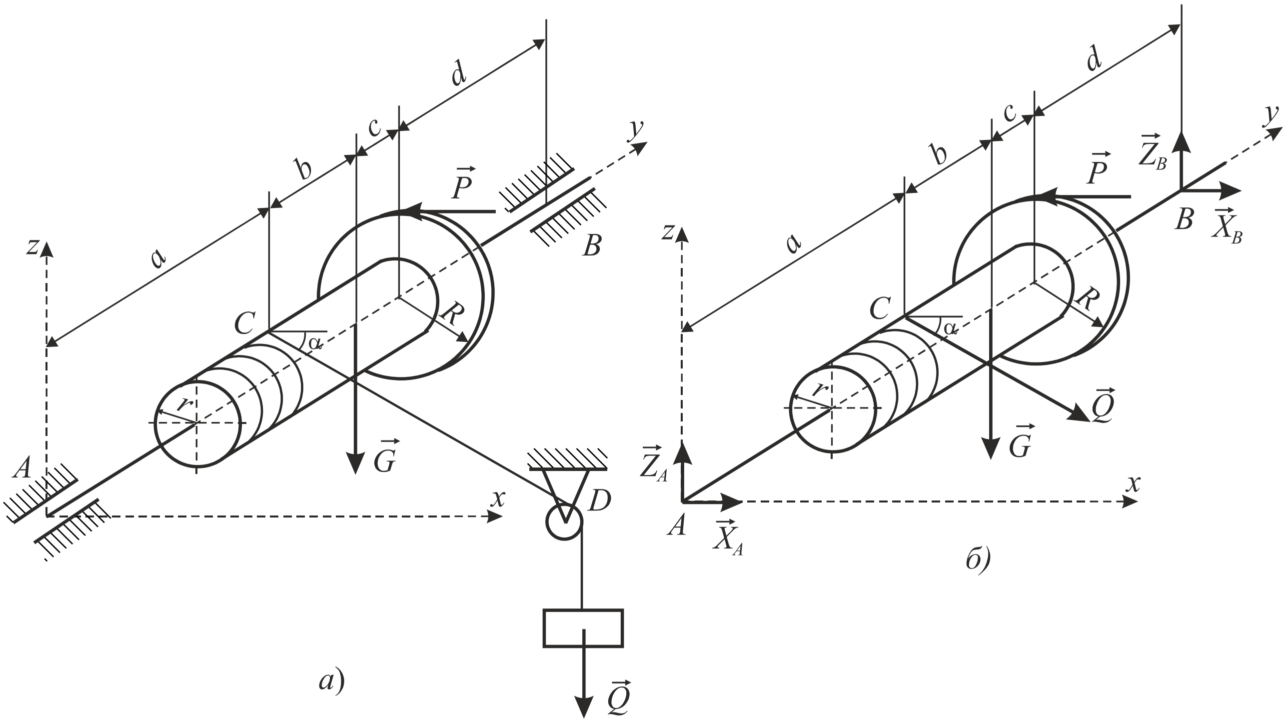

Рис. 4.

<u>Аналитическое решение:</u>

Изобразим активные силы и реакции связей (рис. 4 *б*) и составим уравнения равновесия:

$\sum X_i = 0$; $\qquad X_A + X_B - P + Q\cos\alpha = 0$; (1)

$\sum Y_i = 0$; $\qquad 0=0$;

$\sum Z_i = 0$; $\qquad Z_A + Z_B - G - Q\sin\alpha = 0$; (2)

$\sum m_x(\vec{F}_i) = 0$; $\qquad Z_B \cdot (a+b+c+d) - G \cdot (a+b) - Q\sin\alpha \cdot a = 0$; (3)

$\sum m_y(\vec{F}_i) = 0$; $\qquad Q \cdot r - P \cdot R = 0$; (4)

$\sum m_z(\vec{F}_i) = 0$; $\qquad -X_B \cdot (a+b+c+d) + P \cdot (a+b+c) - Q\cos\alpha \cdot a = 0$. (5)

Решим эту систему уравнений:

$$(4) \Rightarrow P = \frac{Q \cdot r}{R} = \frac{20 \cdot 20}{40} = 10(\kappa H);$$

$$(5) \Rightarrow X_B = \frac{P \cdot (a+b+c) - Q\cos\alpha \cdot a}{a+b+c+d} =$$

$$= \frac{10 \cdot (35+20+30) - 20\cos 60^{\text{O}} \cdot 35}{35+20+30+25} \approx 4{,}55(\kappa H);$$

$$(3) \Rightarrow Z_B = \frac{G \cdot (a+b) + Q\sin\alpha \cdot a}{a+b+c+d} = \frac{10 \cdot (35+20) + 20\sin 60^{\text{O}} \cdot 35}{35+20+30+25} \approx 10{,}51(\kappa H);$$

$$(1) \Rightarrow X_A = -X_B + P - Q\cos\alpha = -4{,}55 + 10 - 10\cos 60^{\text{O}} = 0{,}45(\kappa H);$$

$$(2) \Rightarrow Z_A = -Z_B + G + Q\sin\alpha = -10{,}51 + 10 + 20\sin 60^{\text{O}} \approx 16{,}81(\kappa H).$$

Ответ: $X_A = 0{,}45(\kappa H)$, $Z_A = 16{,}81(\kappa H)$, $X_B = 4{,}55(\kappa H)$, $Z_B = 10{,}51(\kappa H)$, $P = 10(\kappa H)$.

Задача 5. Определение положения центра тяжести плоских фигур

По заданным размерам плоских фигур (рис. 5 *а*) определить положение (координаты) их центра тяжести, если

№ п/п	*a*	*b*	*c*	*R*	*r*	α, град
	см					
8	50	35	10	20	5	30

Решение

а) Аналитическое решение

Дана плоская фигура, размеры которой приведены на рис. 5 *а*) (в см).

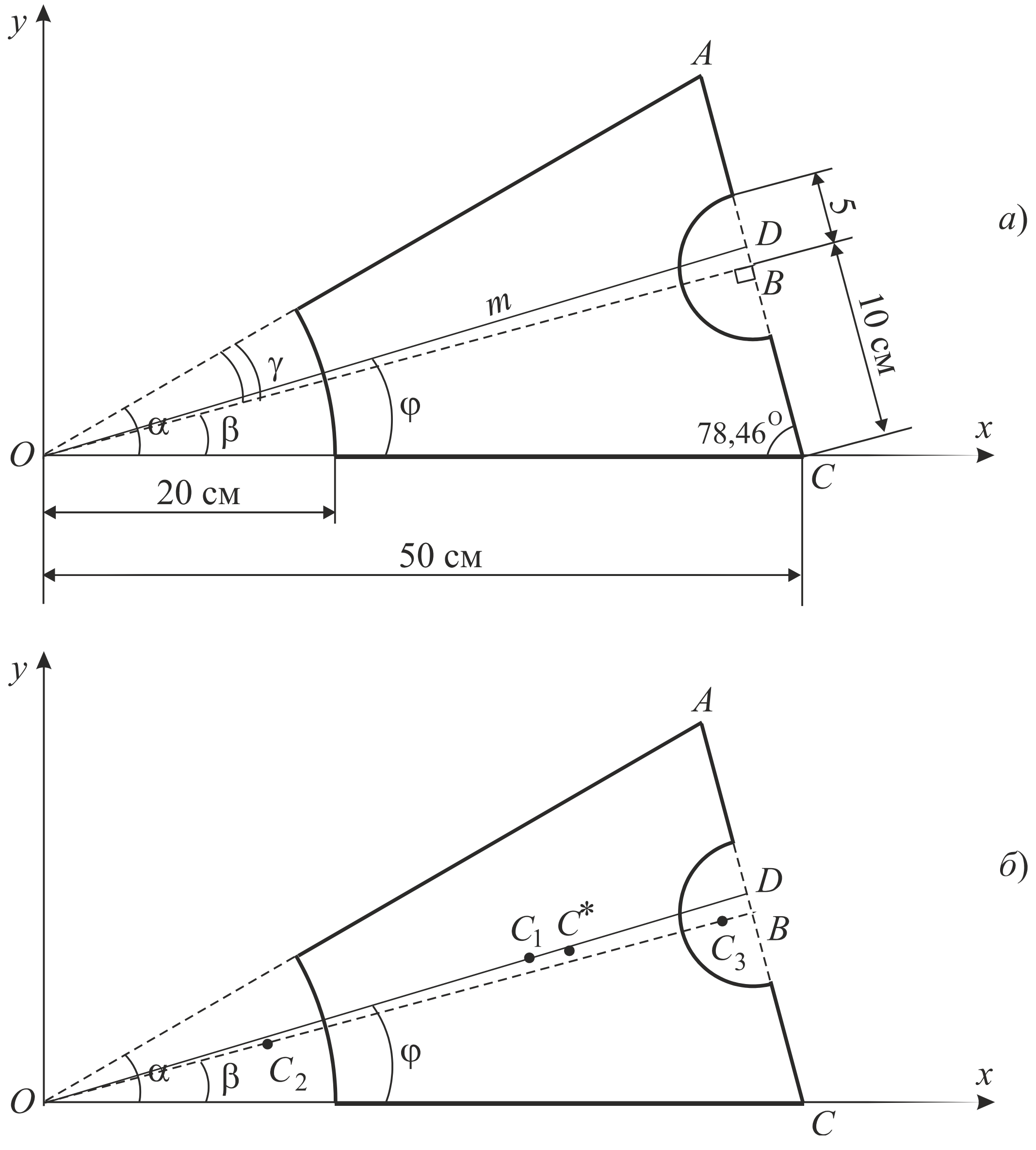

Рис. 5.

Рассмотрим сначала треугольник *OAC* и определим длину его сторон.

С прямоугольного треугольника *OBC*:

$$OB=\sqrt{OC^2-BC^2}=\sqrt{50^2-10^2}\approx 48{,}99(см),$$

$$\sin\beta=\frac{BC}{OC}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}\Rightarrow\beta=\arcsin(1/5)\approx 11{,}54^{O},$$

$$\gamma=\alpha-\beta=30^{O}-11{,}54^{O}=18{,}46^{O}.$$

С прямоугольного треугольника OBA:

$$OA=\frac{OB}{\cos\gamma}=\frac{48{,}99}{\cos 18{,}46^{O}}\approx 51{,}65(см).$$

$$AB=OA\sin\gamma=51{,}65\sin 18{,}46^{O}\approx 16{,}35(см),$$

$$AC=AB+BC=16{,}35+10=26{,}35(см).$$

Определим длину медианы $m=OD$, которая опущена с точки O на сторону AC:

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2OC^2+2OA^2-AC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 50^2+2\cdot 51{,}65^2-26{,}35^2}\approx 49{,}09(см),$$

$$DC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 26{,}35=13{,}175(см).$$

Рассмотрим треугольник ODC. Применим теорему синусов:

$$\frac{DC}{\sin\varphi}=\frac{OD}{\sin 78{,}46^{O}},$$

откуда:

$$\sin\varphi=\frac{DC}{OD}\sin 78{,}46^{O}=\frac{13{,}175}{49{,}09}\sin 78{,}46^{O}\approx 0{,}263\Rightarrow\varphi\approx 15{,}25^{O}.$$

Разбиваем фигуру на простейшие части (рис. 5, *б*). Для каждой из них находим площади и координаты точек C_1, C_2 и C_3.

Часть № 1 – треугольник:

$$p=\frac{1}{2}(OA+OA+AC)=\frac{51{,}65+50+26{,}35}{2}=64 \text{ (см)},$$

$$S_1=\sqrt{p(p-OA)(p-OC)(p-AC)}=\sqrt{64(64-51{,}65)(64-50)(64-26{,}35)}\approx$$

$$\approx 645{,}46 \text{ (см}^2\text{); (формула Герона)}$$

$$x_1=\frac{2}{3}OD\cos\varphi=\frac{2}{3}\cdot 49{,}09\cos 15{,}25^{O}\approx 30{,}97 \text{ (см);}$$

$$y_1 = \frac{2}{3} OD \sin\varphi = \frac{2}{3} \cdot 49,09 \sin 15,25^O \approx 8,61 \text{ (см)}.$$

Часть № 2 – сектор круга:

$$S_2 = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^O} = \frac{20^2 \cdot 30^O}{360^O} \pi \approx 104,72 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$OC_2 = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2 \cdot 20}{3} \cdot \frac{\sin 15^O}{(\pi/12)} \approx 13,18(см),$$

$$x_2 = OC_2 \cos\frac{\alpha}{2} = 13,18 \cos 15^O \approx 12,73 \text{ (см)};$$

$$y_2 = OC_2 \sin\frac{\alpha}{2} = 13,18 \sin 15^O \approx 3,41 \text{ (см)}.$$

Часть № 3 – сектор круга:

$$S_3 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = 39,27 \text{ см}^2;$$

$$BC_3 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2 \cdot 5}{3} \cdot \frac{\sin 45^O}{(\pi/4)} \approx 10,5(см),$$

$$OC_3 = OB - BC_3 = 48,99 - 10,5 = 38,49(см),$$

$$x_3 = OC_3 \cos\frac{\alpha}{2} = 38,49 \cos 15^O \approx 37,18 \text{ см};$$

$$y_3 = OC_3 \sin\frac{\alpha}{2} = 38,49 \sin 15^O \approx 9,96 \text{ см}.$$

Вычисляем координаты центра тяжести C^* с применением метода отрицательных масс:

$$x_{C^*} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 - S_2 - S_3} = \frac{645,46 \cdot 30,97 - 104,72 \cdot 12,73 - 39,27 \cdot 37,18}{645,46 - 104,72 - 39,27} \approx 34,29(см),$$

$$y_{C^*} = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 - S_2 - S_3} = \frac{645,46 \cdot 8,61 - 104,72 \cdot 3,41 - 39,27 \cdot 9,96}{645,46 - 104,72 - 39,27} \approx 9,59(см).$$

По этим значениям координат построим на рис. 5 *б*) положение центра тяжести фигуры.

Ответ: $x_{C^*} = 34,29(см)$, $y_{C^*} = 9,59(см)$**.**