Условие задания

Применяя принцип возможных перемещений определить реакции опор составной конструкции.

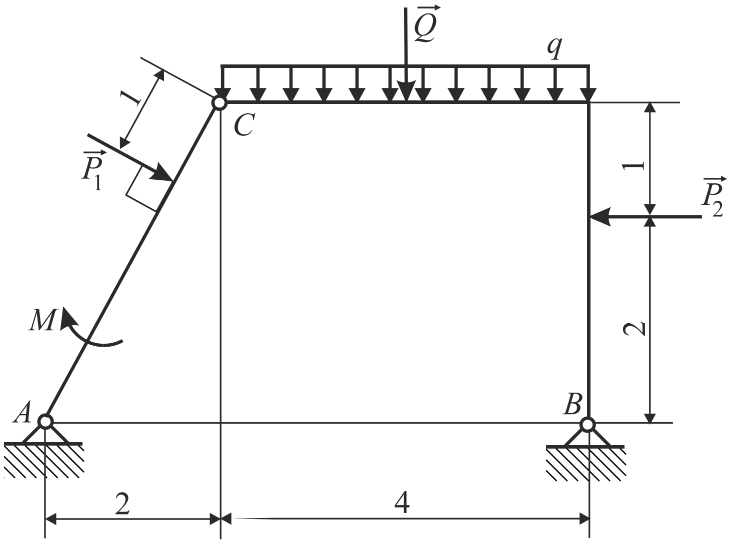

Рис. 1.

Решение

Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой

$$Q = 4q,$$

приложенной в середине загруженного участка.

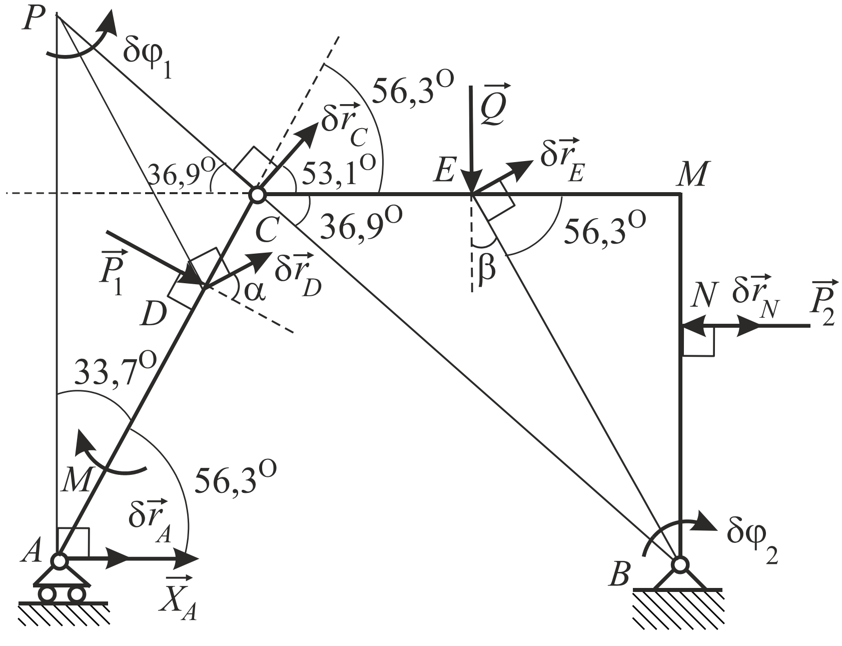

Рис. 2.

Найдем сначала горизонтальную реакцию $\vec{X}_A$ опоры A. Дадим возможное перемещение точке A в направлении $\vec{X}_A$ (см. рис. 2). Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$\delta A=\vec{X}_A\cdot\delta\vec{r}_A+\vec{P}_1\cdot\delta\vec{r}_D+\vec{M}\cdot\delta\vec{\varphi}_1+\vec{Q}\cdot\delta\vec{r}_E+\vec{P}_2\cdot\delta\vec{r}_N=0,$$

или

$$X_A\delta r_A+P_1\delta r_D\cos\alpha-M\delta\varphi_1+Q\delta r_E\cos\left(90^{\text{O}}+\beta\right)+P_2\delta r_N\cos180^{\text{O}}=0.$$

Так как точка P – мгновенный центр скоростей для AC, тогда

$$\delta\varphi_1=\frac{\delta r_A}{PA}=\frac{\delta r_D}{PD}=\frac{\delta r_C}{PC}.$$

Отметим, что

$$AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},$$

$$\cos\angle CAB=\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow\angle CAB=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\approx56{,}3^{\text{O}},$$

$$CB=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5,$$

$$\cos\angle BCE=\frac{4}{5}\Rightarrow\angle BCE=\arccos\frac{4}{5}\approx36{,}9^{\text{O}},$$

$$BE=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},$$

$$\cos\angle BEM=\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow\angle BEM=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\approx56{,}3^{\text{O}},$$

$$\beta=90^{\text{O}}-\angle BEM=90^{\text{O}}-56{,}3^{\text{O}}=33{,}7^{\text{O}},$$

$$\angle ACP=36{,}9^{\text{O}}+56{,}3^{\text{O}}=93{,}2^{\text{O}},$$

$$\angle APC=180^{\text{O}}-33{,}7^{\text{O}}-93{,}2^{\text{O}}=53{,}1^{\text{O}}.$$

Тогда с теоремы синусов:

$$\frac{AC}{\sin\angle APC}=\frac{AP}{\sin\angle PCA}=\frac{PC}{\sin\angle PAC},$$

откуда

$$AP=AC\cdot\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle APC}=\sqrt{13}\cdot\frac{\sin93{,}2^{\text{O}}}{\sin53{,}1^{\text{O}}}\approx4{,}5,$$

$$PC=AC\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle APC}=\sqrt{13}\frac{\sin33{,}7^{\text{O}}}{\sin53{,}1^{\text{O}}}\approx2{,}5.$$

С теоремы косинусов:

$$PD=\sqrt{PC^2+DC^2-2\cdot PC\cdot DC\cdot\cos\angle PCA}=$$

$$=\sqrt{2,5^2+1^2-2\cdot 2,5\cdot 1\cdot \cos 93,2^{\mathrm{O}}}\approx 2,74.$$

Тогда с теоремы синусов:

$$\frac{PC}{\sin\angle PDC}=\frac{PD}{\sin\angle PCD}=\frac{DC}{\sin\angle DPC},$$

тогда

$$\sin\angle PDC=\frac{PC}{PD}\sin\angle PCD=\frac{2,5}{2,74}\cdot\sin 93,2^{\mathrm{O}}\approx 0,91,$$

$$\Rightarrow \angle PDC=\arcsin 0,91\approx 65,64^{\mathrm{O}}.$$

Тогда

$$\alpha=65,64^{\mathrm{O}}.$$

Тогда

$$\delta\varphi_1=\frac{\delta r_A}{4,5}\approx 0,22\delta r_A,$$

$$\delta r_D=PD\cdot\delta\varphi_1=\frac{2,74}{4,5}\delta r_A\approx 0,61\delta r_A,$$

$$\delta r_C=PC\cdot\delta\varphi_1=\frac{2,5}{4,5}\delta r_A\approx 0,56\delta r_A.$$

Так как точка *B* – мгновенный центр скоростей для *BMC*, тогда

$$\delta\varphi_2=\frac{\delta r_C}{BC}=\frac{\delta r_E}{BE}=\frac{\delta r_N}{BN}.$$

Тогда

$$\delta\varphi_2=\frac{0,56}{5}\delta r_A\approx 0,11\delta r_A,$$

$$\delta r_E=BE\cdot\delta\varphi_2=\sqrt{13}\cdot 0,11\delta r_A\approx 0,4\delta r_A,$$

$$\delta r_N=BN\cdot\delta\varphi_2=2\cdot 0,11\delta r_A=0,22\delta r_A.$$

Теперь запишем

$$X_A\delta r_A+P_1\delta r_D\cos\alpha-M\delta\varphi_1+Q\delta r_E\cos\left(90^{\mathrm{O}}+\beta\right)+P_2\delta r_N\cos 180^{\mathrm{O}}=0,$$

или

$$X_A\delta r_A+P_1\cdot 0,61\delta r_A\cdot\cos 65,64^{\mathrm{O}}-M\cdot 0,22\delta r_A+$$
$$+Q\cdot 0,4\delta r_A\cdot\cos\left(90^{\mathrm{O}}+33,7^{\mathrm{O}}\right)-P_2\cdot 0,22\delta r_A=0,$$

или

$$X_A = -P_1 \cdot 0,61 \cdot \cos 65,64^{\mathrm{O}} + M \cdot 0,22 - Q \cdot 0,4 \cdot \cos 123,7^{\mathrm{O}} + P_2 \cdot 0,22 \approx$$

$$\approx 0,22M + 0,22P_2 + 0.88q - 0,25P_1 (H).$$

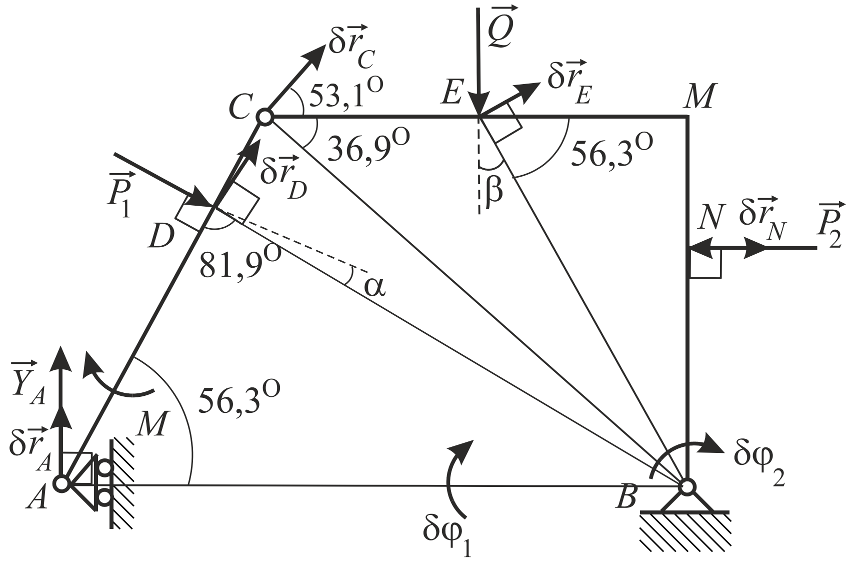

Рис. 3.

Определим вертикальную реакцию $\vec{Y}_A$ опоры A. Дадим возможное перемещение точке A в направлении $\vec{Y}_A$ (см. рис. 3). Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$\delta A = \vec{Y}_A \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{P}_1 \cdot \delta\vec{r}_D + \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi}_1 + \vec{Q} \cdot \delta\vec{r}_E + \vec{P}_2 \cdot \delta\vec{r}_N = 0,$$

или

$$Y_A \cdot \delta r_A + P_1 \cdot \delta r_D \cdot \cos\left(90^{\mathrm{O}} - \alpha\right) + M \cdot \delta\varphi_1 +$$

$$+Q \cdot \delta r_E \cdot \cos\left(90^{\mathrm{O}} + \beta\right) + P_2 \cdot \delta r_N \cos 180^{\mathrm{O}} = 0.$$

Точка B – мгновенный центр скоростей для AC, тогда

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta r_A}{BA} = \frac{\delta r_D}{BD} = \frac{\delta r_C}{BC}.$$

Отметим, что

$$AB = 6, \; AD = AC - DC = \sqrt{13} - 1 \approx 2,61,$$

С треугольника ABD:

с теоремы косинусов:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle DAB} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 2,61^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2,61 \cdot \cos 56,3^{\mathrm{O}}} \approx 5,04,$$

с теоремы синусов:

$$\frac{DB}{\sin\angle DAB}=\frac{DA}{\sin\angle DBA}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}.$$

Тогда

$$\sin\angle ADB=\frac{AB}{DB}\sin\angle DAB=\frac{6}{5,04}\sin 56,3^{\mathrm{O}}\approx 0,99,$$

$$\angle ADB=\arcsin 0,99\approx 81,9^{\mathrm{O}},$$

$$\alpha=90^{\mathrm{O}}-\angle ADB=90^{\mathrm{O}}-81,9^{\mathrm{O}}=8,1^{\mathrm{O}}.$$

Тогда

$$\delta\varphi_1=\frac{\delta r_A}{6}\approx 0,17\delta r_A,$$

$$\delta r_D=BD\delta\varphi_1=5,04\cdot 0,17\delta r_A\approx 0,86\delta r_A,$$

$$\delta r_C=BC\cdot\delta\varphi_1=5\cdot 0,17\delta r_A\approx 0,85\delta r_A.$$

Точка B – мгновенный центр скоростей для BMC, тогда

$$\delta\varphi_2=\frac{\delta r_C}{BC}=\frac{\delta r_E}{BE}=\frac{\delta r_N}{BN},$$

и

$$\delta\varphi_2=\frac{\delta r_C}{BC}\approx 0,17\delta r_A,$$

$$\delta r_E=BE\cdot\delta\varphi_2=\sqrt{13}\cdot 0,17\delta r_A\approx 0,61\delta r_A,$$

$$\delta r_N=BN\cdot\delta\varphi_2=2\cdot 0,17\delta r_A=0,34\delta r_A.$$

Тогда

$$Y_A\cdot\delta r_A+P_1\cdot 0,86\delta r_A\cdot\cos 81,9^{\mathrm{O}}+M\cdot 0,17\delta r_A+$$
$$+Q\cdot 0,61\delta r_A\cdot\cos\left(90^{\mathrm{O}}+33,7^{\mathrm{O}}\right)-P_2\cdot 0,34\delta r_A=0,$$

откуда

$$Y_A=0,34P_2-0,17M-P_1\cdot 0,86\cdot\cos 81,9^{\mathrm{O}}-Q\cdot 0,61\cdot\cos 123,7^{\mathrm{O}}\approx$$
$$\approx 0,34P_2-0,17M-0,12P_1+1,36q\left(H\right).$$

Найдем теперь горизонтальную реакцию $\vec{X}_B$ опоры B. Дадим возможное перемещение точке B в направлении $\vec{X}_B$ (см. рис. 4). Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$\delta A = \vec{X}_B \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{P}_1 \cdot \delta\vec{r}_D + \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi}_1 + \vec{Q} \cdot \delta\vec{r}_E + \vec{P}_2 \cdot \delta\vec{r}_N = 0,$$

или

$$X_B \delta r_B + P_1 \delta r_D + M \delta\varphi_1 + Q \delta r_E \cos\gamma + P_2 \delta r_N \cos 180^{\circ} = 0.$$

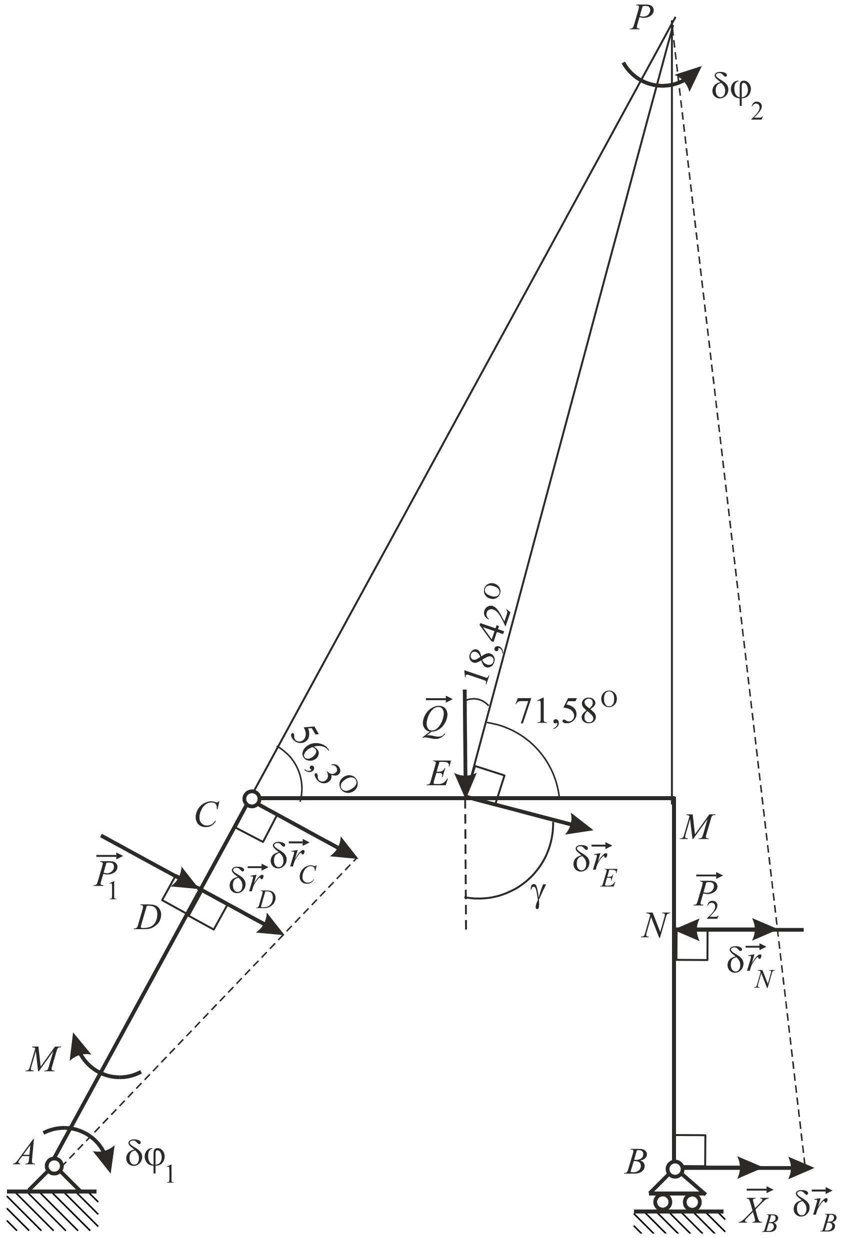

Рис. 4.

Так как точка P – мгновенный центр скоростей для BMC, тогда

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta r_B}{PB} = \frac{\delta r_E}{PE} = \frac{\delta r_C}{PC} = \frac{\delta r_N}{PN}.$$

Отметим, что

$$PC = MC / \cos 56{,}3^{\circ} = 4 / \cos 56{,}3^{\circ} \approx 7{,}21,$$

$$PM = PC \sin 56{,}3^{\circ} = 7{,}21 \sin 56{,}3^{\circ} \approx 6,$$

$$NP = NM + MP = 1 + 6 = 7,$$

$$BP = BM + MP = 3 + 6 = 9,$$

$$PE = \sqrt{ME^2 + MP^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6,33,$$

$$\cos\angle PEM = \frac{EM}{EP} = \frac{2}{6,33} \Rightarrow \angle PEM = \arccos\left(\frac{2}{6,33}\right) \approx 71,58^{\text{O}},$$

$$\gamma = 180^{\text{O}} - 90^{\text{O}} - 18.42^{\text{O}} = 71,58^{\text{O}}.$$

Тогда

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta r_B}{PB} = \frac{\delta r_B}{9} \approx 0,11\delta r_B,$$

$$\delta r_E = PE\delta\varphi_2 = 6,33 \cdot 0,11\delta r_B \approx 0,7\delta r_B,$$

$$\delta r_C = PC \cdot \delta\varphi_2 = 7,21 \cdot 0,11\delta r_B = 0,79\delta r_B,$$

$$\delta r_N = PN \cdot \delta\varphi_2 = 7 \cdot 0,11\delta r_B = 0,77\delta r_B.$$

Точка A – мгновенный центр скоростей для AC, тогда

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta r_D}{AD} = \frac{\delta r_C}{AC},$$

откуда

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta r_C}{AC} = \frac{0,79\delta r_B}{\sqrt{13}} \approx 0,22\delta r_B,$$

$$\delta r_D = AD \cdot \delta\varphi_1 = 2,61 \cdot 0,22\delta r_B \approx 0,57\delta r_B.$$

Тогда

$$X_B\delta r_B + P_1 \cdot 0,57\delta r_B + M \cdot 0,22\delta r_B + 4q \cdot 0,7\delta r_B \cdot \cos 71,58^{\text{O}} - P_2 \cdot 0,77\delta r_B = 0,$$

откуда

$$X_B = 0,77P_2 - 0,22M - 0,57P_1 - 4q \cdot 0,7 \cdot \cos 71,58^{\text{O}} \approx$$
$$\approx 0,77P_2 - 0,22M - 0,57P_1 - 0,88q.$$

Определим вертикальную реакцию $\vec{Y}_B$ опоры B. Дадим возможное перемещение точке B в направлении $\vec{Y}_B$ (см. рис. 5). Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$\delta A = \vec{Y}_B \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{P}_1 \cdot \delta\vec{r}_D + \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi}_1 + \vec{Q} \cdot \delta\vec{r}_E + \vec{P}_2 \cdot \delta\vec{r}_N = 0,$$

или

$$Y_B \cdot \delta r_B + P_1 \cdot \delta r_D + M \cdot \delta\varphi_1 + Q \cdot \delta r_E \cos\gamma + P_2 \cdot \delta r_N \cos\left(90^{\text{O}} + \alpha\right) = 0.$$

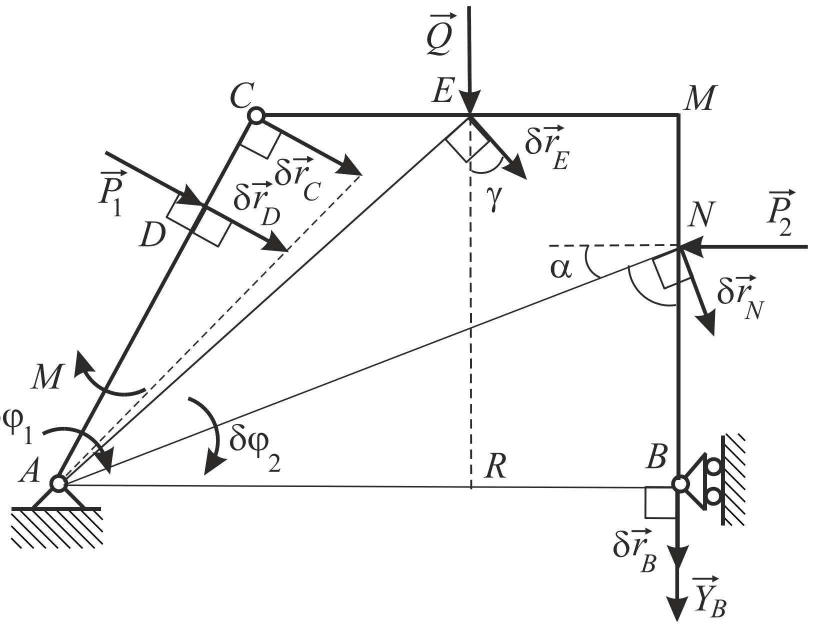

Рис. 5.

Так как точка A – мгновенный центр скоростей для BMC, тогда

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta r_B}{AB} = \frac{\delta r_E}{AE} = \frac{\delta r_C}{AC} = \frac{\delta r_N}{AN}.$$

Отметим, что

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}33,$$

$$AE = \sqrt{RE^2 + AR^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$\cos\angle ANB = \frac{NB}{AN} = \frac{2}{6{,}33} \Rightarrow \angle ANB = \arccos\left(\frac{2}{6{,}33}\right) \approx 71{,}58^{\text{O}},$$

$$\alpha = 90^{\text{O}} - \angle ANB = 90^{\text{O}} - 71{,}58^{\text{O}} = 18{,}42^{\text{O}},$$

$$\cos\angle AER = \frac{ER}{AE} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle AER = \arccos\frac{3}{5} \approx 53{,}13^{\text{O}},$$

$$\gamma = 90^{\text{O}} - \angle AER = 90^{\text{O}} - 53{,}13^{\text{O}} = 36{,}87^{\text{O}}.$$

Тогда

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta r_B}{AB} = \frac{\delta r_B}{6} \approx 0{,}17\delta r_B,$$

$$\delta r_E = AE \cdot \delta\varphi_2 = 5 \cdot 0{,}17\delta r_B = 0{,}85\delta r_B,$$

$$\delta r_C = AC \cdot \delta\varphi_2 = \sqrt{13} \cdot 0{,}17\delta r_B \approx 0{,}61\delta r_B,$$

$$\delta r_N = AN \cdot \delta\varphi_2 = AN \cdot \delta\varphi_2 = 6{,}33 \cdot 0{,}17\delta r_B \approx 1{,}08\delta r_B.$$

Точка A – мгновенный центр скоростей для AC, тогда

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta r_D}{AD} = \frac{\delta r_C}{AC},$$

откуда

$$\delta\varphi_1 = \frac{0,61\delta r_B}{AC} = \frac{0,61\delta r_B}{\sqrt{13}} \approx 0,17\delta r_B,$$

$$\delta r_D = AD\cdot\delta\varphi_1 = 2,61\cdot 0,17\delta r_B \approx 0,44\delta r_B.$$

Тогда

$$Y_B\cdot\delta r_B + P_1\cdot 0,44\delta r_B + M\cdot 0,17\delta r_B +$$
$$+4q\cdot 0,85\delta r_B\cdot\cos 36,87^{O} + P_2\cdot 1,08\delta r_B\cdot\cos\left(90^{O}+18,42^{O}\right) = 0,$$

откуда

$$Y_B = -P_1\cdot 0,44 - M\cdot 0,17 - 4q\cdot 0,85\cdot\cos 36,87^{O} - P_2\cdot 1,08\cdot\cos 108,42^{O} \approx$$
$$\approx 0,34P_2 - 0,44P_1 - 0,17M - 2,72q\left(H\right).$$

Ответ:

$X_A = 0,22M + 0,22P_2 + 0.88q - 0,25P_1\left(H\right),$

$Y_A = 0,34P_2 - 0,17M - 0,12P_1 + 1,36q\left(H\right),$

$X_B = 0,77P_2 - 0,22M - 0,57P_1 - 0,88q\left(H\right),$

$Y_B = 0,34P_2 - 0,44P_1 - 0,17M - 2,72q\left(H\right).$