Условие задания

Механическая система движется из состояния покоя.

Дано: $v_1, S_1, m_1, m_2, m_3, m_4, R_2, r_2, i_{2x}, R_3, R_4, f, \delta, \alpha$.

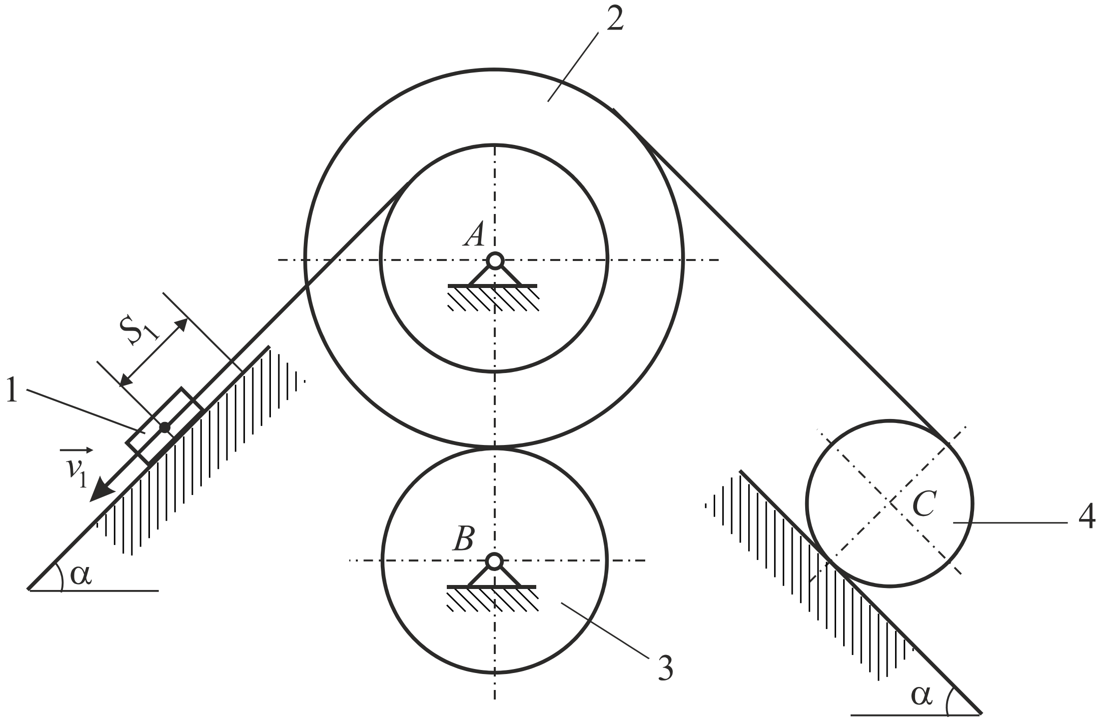

Рис. 1.

Решение

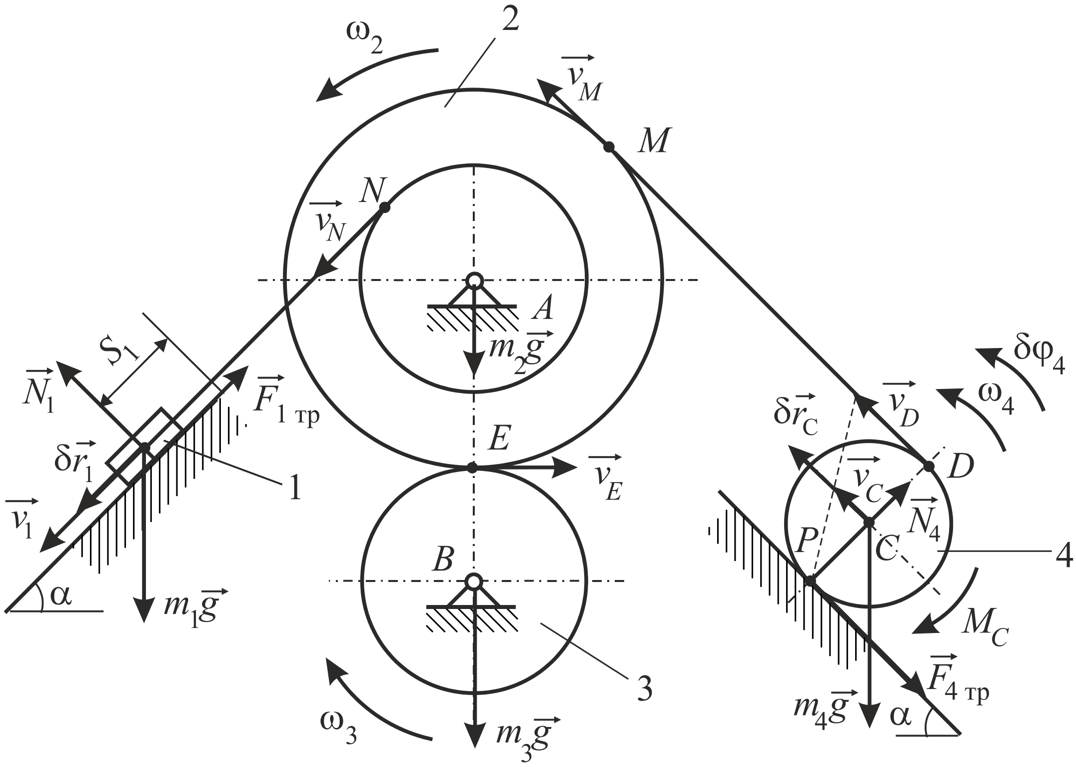

Рис. 2.

Решим эту задачу сначала через уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_{S_1}.$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Определим кинематические зависимости между телами:

$$v_1 = \dot{S}_1,\ v_N = v_1,\ \omega_2 = \frac{v_N}{r_2} = \frac{\dot{S}_1}{r_2},\ v_E = v_M = v_D = R_2\omega_2,\ \omega_3 = \frac{v_E}{R_3} = \frac{R_2\omega_2}{R_3} = \frac{R_2}{R_3 r_2}\dot{S}_1,$$

точка P – МЦС для тела 4, тогда

$$\omega_4 = \frac{v_D}{2R_4} = \frac{R_2\omega_2}{2R_4} = \frac{R_2}{2R_4 r_2}\dot{S}_1,\ v_C = R_4\omega_4 = \frac{R_2}{2r_2}\dot{S}_1 .$$

Так как тела 3 и 4 сплошные диски, а радиус инерции тела 2 равен i_{2x}, тогда

$$J_{Az} = m_2 i_{2x}^2,\ J_{Bz} = \frac{m_3 R_3^2}{2},\ J_{Cz} = \frac{m_4 R_4^2}{2} .$$

Тело 1 совершает поступательное движение, тела 2 и 3 – вращаются, а тело 4 – совершает плоское движение, тогда

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{S}_1^2 ,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{Az}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2}\dot{S}_1^2 ,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{Bz}\omega_3^2 = \frac{1}{4}\frac{m_3 R_2^2}{r_2^2}\dot{S}_1^2 ,$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_C^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Cz}\omega_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \left(\frac{R_2}{2r_2}\dot{S}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_4 R_4^2}{2}\left(\frac{R_2}{2R_4 r_2}\dot{S}_1\right)^2 = \frac{3}{16}\frac{m_4 R_2^2}{r_2^2}\dot{S}_1^2 ,$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{S}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2}\dot{S}_1^2 + \frac{1}{4}\frac{m_3 R_2^2}{r_2^2}\dot{S}_1^2 + \frac{3}{16}\frac{m_4 R_2^2}{r_2^2}\dot{S}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{2r_2^2} + \frac{3}{8}\frac{m_4 R_2^2}{r_2^2}\right)\dot{S}_1^2 .$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = \left(m_1 + \frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{2r_2^2} + \frac{3}{8}\frac{m_4 R_2^2}{r_2^2}\right)\ddot{S}_1 ,\ \frac{\partial T}{\partial S_1} = 0 .$$

Определим обобщенную силу Q_{S_1} на перемещении $\delta r_1 = \delta S_1$ из условия

$$\delta A = Q_{S_1}\delta S_1 = m_1 g \sin\alpha \cdot \delta S_1 - F_{1\text{тр}} \cdot \delta S_1 - m_4 g \sin\alpha \cdot \delta r_C - M_C \delta\varphi_4 .$$

Силы $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}$ приложены к неподвижным точкам и их работа равна 0, сила $\vec{F}_{4\text{тр}}$ приложена к точке P – МЦС, и ее работа также равна 0.

Отметим, что

$$F_{1\text{тр}} = fN_1 = fm_1 g\cos\alpha ,$$

$$M_C = \delta \cdot N_4 = \delta \cdot m_4 g \cos\alpha ,$$

$$\delta\varphi_4 = \frac{R_2}{2R_4 r_2}\delta S_1,\ \delta r_C = \frac{R_2}{2r_2}\delta S_1 \text{ (так же как для скоростей).}$$

Тогда

$$\delta A = m_1 g\sin\alpha\cdot\delta S_1 - f m_1 g\cos\alpha\cdot\delta S_1 -$$

$$-m_4 g\sin\alpha\cdot\frac{R_2}{2r_2}\delta S_1 - \delta\cdot m_4 g\cos\alpha\frac{R_2}{2R_4 r_2}\delta S_1,$$

откуда

$$Q_{S_1} = (\sin\alpha - f\cos\alpha)m_1 g - \left(\frac{R_2\sin\alpha}{2r_2} + \frac{\delta R_2\cos\alpha}{2R_4 r_2}\right)m_4 g\ .$$

Тогда

$$\left(m_1 + \frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{2r_2^2} + \frac{3}{8}\frac{m_4 R_2^2}{r_2^2}\right)\ddot{S}_1 = (\sin\alpha - f\cos\alpha)m_1 g - \left(\frac{R_2\sin\alpha}{2r_2} + \frac{\delta R_2\cos\alpha}{2R_4 r_2}\right)m_4 g,$$

откуда **ответ:**

$$\ddot{S}_1 = \frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha)m_1 g - \left(\frac{R_2\sin\alpha}{2r_2} + \frac{\delta R_2\cos\alpha}{2R_4 r_2}\right)m_4 g}{m_1 + \frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2}{2r_2^2} + \frac{3}{8}\frac{m_4 R_2^2}{r_2^2}}.$$

Решим эту задачу через ***принцип возможных перемещений***, который для динамики называется ***общим уравнением динамики***. Для этого к активным силам додадим силы и моменты инерции системы (рис. 3).

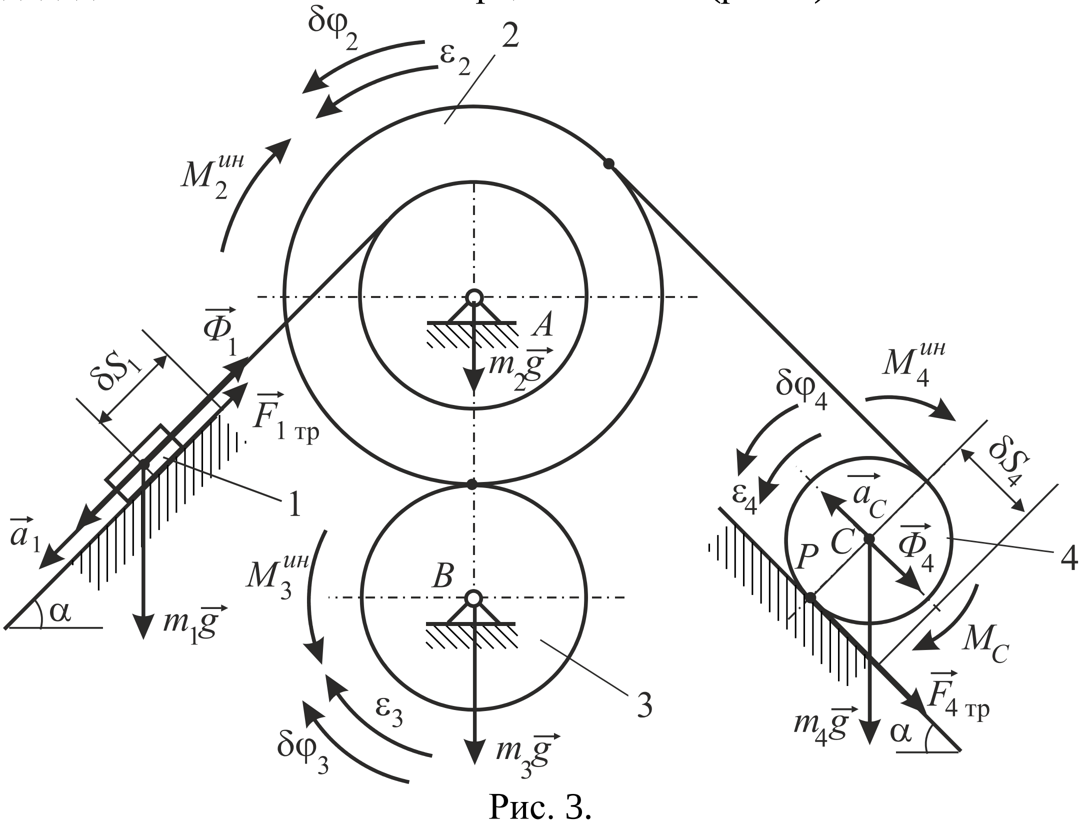

Рис. 3.

Запишем для нашей системы ***общее уравнение динамики:***

$$\delta A = m_1 g \sin\alpha \cdot \delta S_1 - F_{1\text{тр}} \cdot \delta S_1 - m_4 g \sin\alpha \cdot \delta S_4 - M_C \delta\varphi_4 -$$

$$-\varPhi_1 \cdot \delta S_1 - \varPhi_4 \cdot \delta S_4 - M_2^{ин} \delta\varphi_2 - M_3^{ин} \delta\varphi_3 - M_4^{ин} \delta\varphi_4 = 0.$$

Отметим, что (так же как и для скоростей – см. выше):

$$a_1 = \ddot{S}_1,\ \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2},\ \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{r_2},\ \varepsilon_3 = \frac{R_2}{R_3 r_2} a_1,\ \delta\varphi_3 = \frac{R_2}{R_3 r_2} \delta S_1,$$

$$\varepsilon_4 = \frac{R_2}{2R_4 r_2} a_1,\ \delta\varphi_4 = \frac{R_2}{2R_4 r_2} \delta S_1,\ a_C = \frac{R_2}{2r_2} a_1,\ \delta S_4 = \frac{R_2}{2r_2} \delta S_1,$$

$$\varPhi_1 = m_1 a_1,\ \varPhi_4 = m_4 a_C = \frac{m_4 R_2}{2r_2} a_1,$$

$$M_2^{ин} = J_{Az} \varepsilon_2 = \frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2} a_1,\ M_3^{ин} = J_{Bz} \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3 R_2}{2r_2} a_1,\ M_4^{ин} = J_{Cz} \varepsilon_4 = \frac{m_4 R_4 R_2}{4r_2} a_1.$$

Тогда

$$m_1 g \sin\alpha \cdot \delta S_1 - f m_1 g \cos\alpha \cdot \delta S_1 - m_4 g \sin\alpha \cdot \frac{R_2}{2r_2} \delta S_1 -$$

$$-\delta \cdot m_4 g \cos\alpha \cdot \frac{R_2}{2R_4 r_2} \delta S_1 - m_1 a_1 \cdot \delta S_1 - \frac{m_4 R_2}{2r_2} a_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \delta S_1 -$$

$$-\frac{m_2 i_{2x}^2}{r_2} a_1 \frac{\delta S_1}{r_2} - \frac{m_3 R_3 R_2}{2r_2} a_1 \frac{R_2}{R_3 r_2} \delta S_1 - \frac{m_4 R_4 R_2}{4r_2} a_1 \frac{R_2}{2R_4 r_2} \delta S_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha) m_1 g - \left(\dfrac{R_2 \sin\alpha}{2r_2} + \dfrac{R_2 \delta \cos\alpha}{2R_4 r_2} \right) m_4 g}{m_1 + \dfrac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2} + \dfrac{m_3 R_2^2}{2r_2^2} + \dfrac{3m_4 R_2^2}{8r_2^2}}.$$

Видим, что ответы по методу Лагранжа 2-го рода и по общему уравнению динамики (принципу возможных перемещений) совпали.

Ответ: $$a_1 = \ddot{S}_1 = \frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha) m_1 g - \left(\dfrac{R_2 \sin\alpha}{2r_2} + \dfrac{R_2 \delta \cos\alpha}{2R_4 r_2} \right) m_4 g}{m_1 + \dfrac{m_2 i_{2x}^2}{r_2^2} + \dfrac{m_3 R_2^2}{2r_2^2} + \dfrac{3m_4 R_2^2}{8r_2^2}}.$$