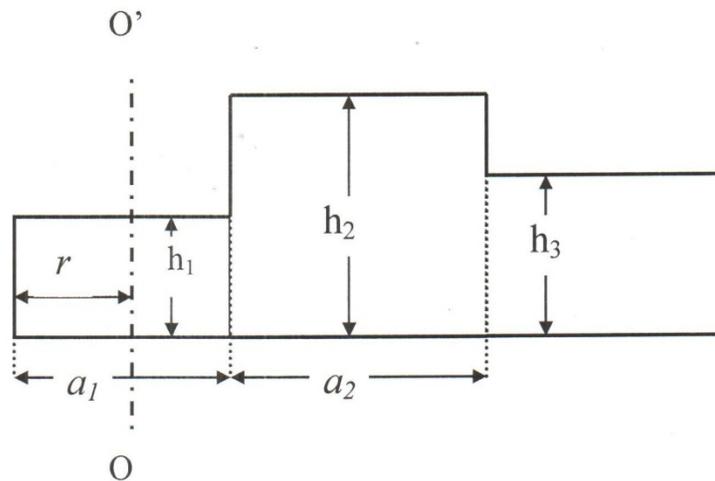


Задача к теме 8.

Пластина, изображенная на рисунке, может вращаться вокруг оси  $OO'$ , проходящей на расстоянии  $r$  от левого края пластины. Вычислить момент инерции пластины относительно этой оси, "разделив" пластину на десять частей одинаковой ширины. Каждую часть принять за материальную точку. Общая ширина пластины 2 м. Поверхностная плотность пластины  $2 \text{ кг/м}^2$ . Размеры пластины даны ниже.

На расстояниях  $x_1, x_2, x_3$  от левого края пластины, перпендикулярно к ней, приложены силы  $F_1, F_2, F_3$ . Положительное направление сил от нас. Найти угловое ускорение пластины.



Дано:

$$a_1 = 0,2; a_2 = 0,6$$

$$h_1 = 0,6; h_2 = 0,3; h_3 = 0,7$$

$$x_1 = 0,5; x_2 = 1,0; x_3 = 1,7$$

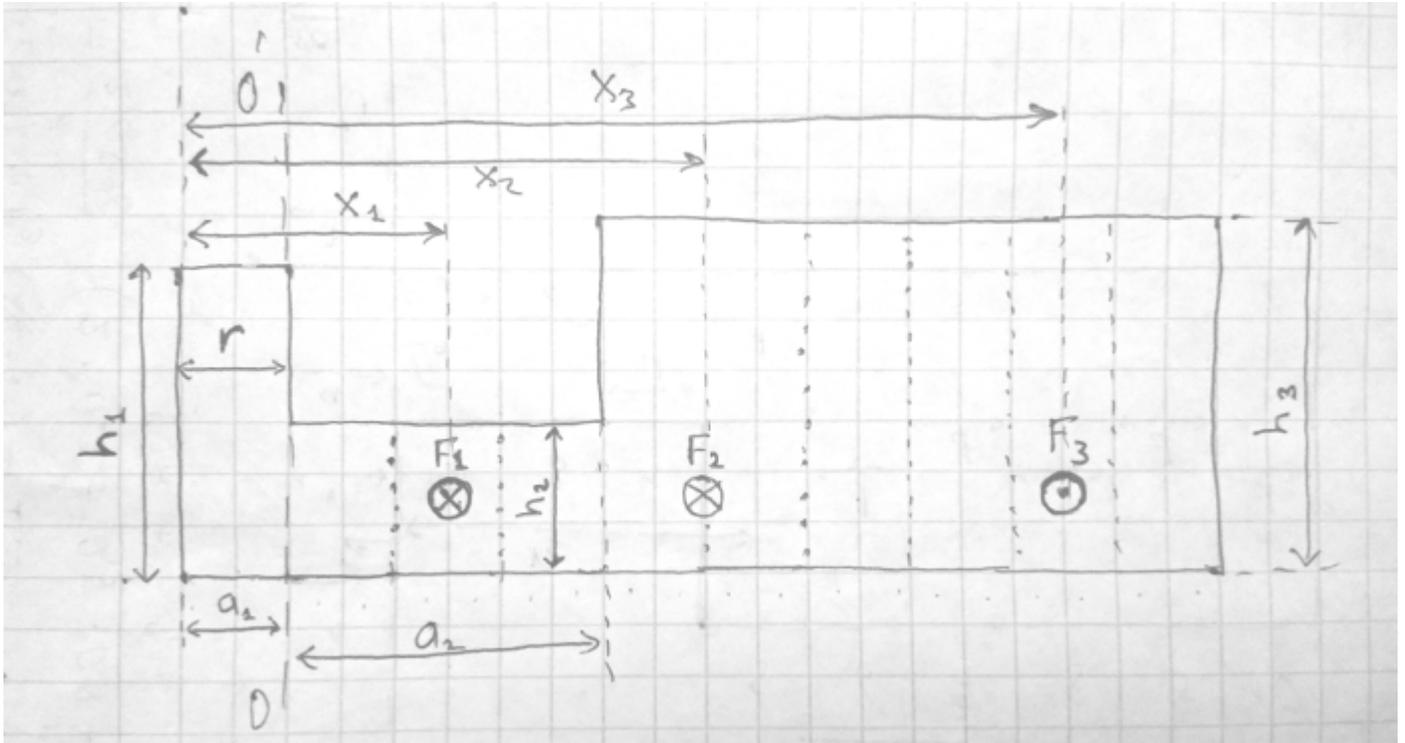
$$F_1 = 2,0; F_2 = 0,5; F_3 = -0,8$$

$$r = 0,2$$

$$l = 2 \quad // \text{ длина}$$

$$\sigma = 2 \quad // \text{ поверхностная плотность}$$

Все величины указаны в СИ.



Перерисовал чертеж с учетом указанных в условии размеров и разбил на 10 частей одинаковой ширины, обозначил точки приложения сил. Знак силы  $F_3$  отрицательный, поэтому она направлена к нам.

Очевидно, ширина каждой части  $d = 2/10 = 0,2$  м. Масса каждой части равна её площади, умноженной на поверхностную плотность, а площадь, в свою очередь, равна ширине умноженной на высоту:

$$m = \sigma d h$$

Заменяем каждую часть материальной точкой лежащей в центре этой части. Рассчитаем массы и расстояния до них:

$$m_1 = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,24$$

$$m_2 = m_3 = m_4 = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,12$$

$$m_5 = m_6 = \dots = m_{10} = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,7 = 0,28$$

Расстояния до масс равны расстояниям от оси до середин соответствующих частей. Ниже в таблице приведены все массы и расстояния.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m_i$	0,24	0,12	0,12	0,12	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28
$r_i$	0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7

По определению момент инерции равен сумме произведений масс всех частей системы на квадраты расстояний от них до оси вращения:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Вычисляем:

$$I = 0,24 \cdot 0,1^2 + 0,12 \cdot (0,1^2 + 0,3^2 + 0,5^2) + 0,28 \cdot (0,7^2 + 0,9^2 + 1,1^2 + 1,3^2 + 1,5^2 + 1,7^2) = \mathbf{2,6596}$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения, полный момент сил действующих на систему равен произведению момента инерции системы на угловое ускорение:

$$M = I \alpha$$

где  $\alpha$  — угловое ускорение. Отсюда,

$$\alpha = \frac{M}{I}$$

По определению, момент силы равен произведению силы на её плечо (кратчайшее расстояние от точки приложения силы до оси вращения). В нашем случае, плечи сил равны  $x_1 - r$ ,  $x_2 - r$  и  $x_3 - r$ . Полный момент сил равен сумме моментов всех сил, действующих на систему:

$$M = F_1 \cdot (x_1 - r) + F_2 \cdot (x_2 - r) + F_3 \cdot (x_3 - r)$$

Подставим это в полученное выше выражение для углового ускорения и вычислим его:

$$\alpha = \frac{F_1 \cdot (x_1 - r) + F_2 \cdot (x_2 - r) + F_3 \cdot (x_3 - r)}{I} = \frac{2 \cdot (0,5 - 0,2) + 0,5 \cdot (1 - 0,2) - 0,8 \cdot (1,7 - 0,2)}{2,6596} = \mathbf{-0,075}$$

Знак минус указывает, что вектор углового ускорения направлен вниз.