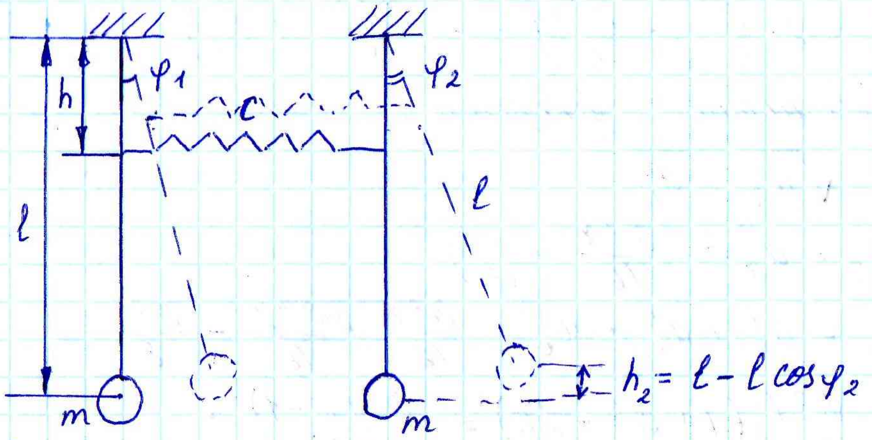

Две степени свободы в системе.

Обобщенные координаты φ_1 и φ_2.

В системе действуют консервативные силы: силы тяжести и сила упругости.

Уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}.$$

1) Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{ml^2\omega_1^2}{2} = \frac{ml^2\dot\varphi_1^2}{2}, \quad T_2 = \frac{ml^2\dot\varphi_2^2}{2}$$

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1} = ml^2\dot\varphi_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1}\right) = ml^2\ddot\varphi_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2} = ml^2\dot\varphi_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2}\right) = ml^2\ddot\varphi_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0.$$

2) Потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_{пр}$$

$\Pi_1 = -mgl(1-\cos\varphi_1)$ – пот. эн. 1-го маятника

$\Pi_2 = -mgl(1-\cos\varphi_2)$ – пот. эн. 2-го маятника

$\Pi_{пр}$ – пот. энергия пружины

$$\Pi_{пр} = \frac{\Delta x^2}{2}$$

$$\Delta x \quad h\sin\varphi_2 - h\sin\varphi_1 = h(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$

$$\Pi_{пр} = \frac{ch^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2}{2}$$

$$\Pi = mgl(2-\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) + \frac{ch^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2}{2}$$

За ноль мы приняли потенциальную энергию маятников, когда они вертикальны

Для малых углов φ: $\sin\varphi \approx \varphi$

$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{2}$ отсюда

$$\Pi = mgl\left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2}\right) + \frac{ch^2(\varphi_2-\varphi_1)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = mgl\varphi_1 - ch^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = mgl\varphi_2 + ch^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

3) Составим уравнения:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\varphi}_1 = -(mgl\varphi_1 + ch^2(\varphi_2-\varphi_1)) \\ ml^2\ddot{\varphi}_1 = -(mgl\varphi_2 + ch^2(\varphi_2-\varphi_1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 - \frac{ch^2}{ml^2}(\varphi_2-\varphi_1) = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{ch^2}{ml^2}(\varphi_2-\varphi_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}(\varphi_1+\varphi_2) = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 + \frac{2ch^2}{ml^2}(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{g}{l}(\varphi_2-\varphi_1) = 0 \end{cases}$$

Введем новые переменные:

$\varphi_1 + \varphi_2 = \psi$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \eta$

$$\begin{cases} \ddot{\psi} + \frac{g}{l}\psi = 0 \\ \eta + \left(\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}\right)\eta = 0 \end{cases}$$

отсюда $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}$

Решение уравнений будем искать в виде:

$\psi = A_1 \cos(k_1 t + \beta_1)$

$\eta = A_2 \cos(k_2 t + \beta_2)$

тогда $\dot{\psi} = -A_1 k_1 \sin(k_1 t + \beta_1)$

$\dot{\eta} = -A_2 k_2 \sin(k_2 t + \beta_2)$

начальные условия:

$\varphi_2(0) = \alpha$, $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0 \Rightarrow$

$\psi(0) = \alpha$, $\eta(0) = \alpha$, $\dot{\psi}(0) = 0$, $\eta(0) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = A_1 \cos\beta_1 \\ \alpha = A_2\cos\beta_2 \\ 0 = -A_1 k_1 \sin\beta_1 \\ 0 = -A_2 k_2 \sin\beta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = \alpha \\ A_2 = \alpha \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\psi = \alpha\cos k_1 t$; $\varphi_1 = \frac{\psi - \eta}{2}$

$\eta = \alpha\cos k_2 t$; $\varphi_2 = \frac{\psi+\eta}{2}$ $\Rightarrow$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t - \cos k_2 t) = \alpha \sin\frac{k_1+k_2}{2}t \sin\frac{k_2-k_1}{2}t$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t + \cos k_2 t) = \alpha\cos\frac{k_1+k_2}{2}t\cos\frac{k_1+k_2}{2}t$$

мы воспользовались формулой для суммы и разности косинусов.