Задача 1.

Для данного поперечного сечения требуется:

1. Определить положение центра тяжести.
2. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести X_c, Y_c.
3. Найти направление главных центральных осей.
4. Найти величины моментов инерции относительно главных центральных осей.
5. Вычертить заданное сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

I, II- уголок равнополочный № 8:

B=8 *см*, d=0,8 *см*, A_1=12,3 *см*^{2}, z_0=2,27 *см*

$J_x= J_y$=73,4 *см*^{4}

III- двутавр № 12:

h=12 см, b=6,4 *см,* d=0,48 *см,* t=0,73 *см,* A_3=14,7 *см*^{2},

J_x=350 *см*^{4}, J_y=27,9 *см*^{4}.

Находим координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{12{,}3 \cdot 5{,}71 + 12{,}3 \cdot 9{,}17 + 14{,}7 \cdot 3{,}2}{12{,}3 \cdot 2 + 14{,}7} = \frac{230{,}064}{39{,}3} = 5{,}854\,см$$

$$y_c = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{12{,}3 \cdot 3 + 12{,}3 \cdot 7{,}26 + 14{,}7 \cdot 6}{12{,}3 \cdot 2 + 14{,}7} = \frac{214{,}398}{39{,}3} = 5{,}455\,см$$

X_C, Y_C – главные центральные оси сечения.

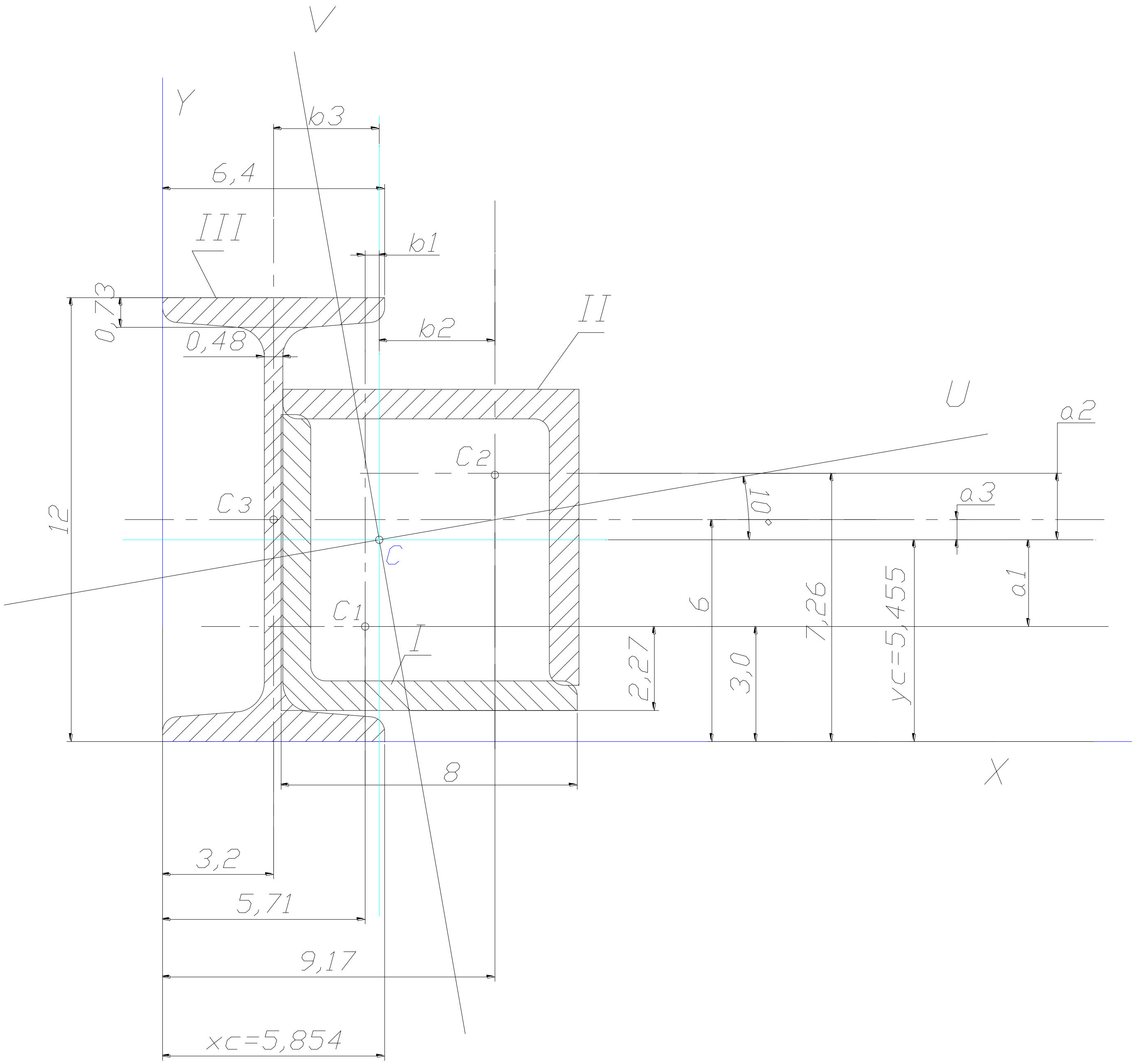
Главные центральные моменты инерции всего сечения:

a_i – расстояния между осью X_c и центрами тяжести каждой из фигур:

$a_1 = y_1 - y_c = 3 – 5{,}455 = -2{,}455$ *см*

$a_2 = y_2 - y_c = 7{,}26 – 5{,}455 = 1{,}805$ *см*

$a_3 = y_3 - y_c = 6 – 5{,}455 = 0{,}545$ *см*



b_i – расстояния между осью Y_C и центрами тяжести каждой из фигур:

$b_1 = x_1 - x_c = 5{,}71 - 5{,}854 = -0{,}144$ *см*

$b_2 = x_2 - x_c = 9{,}17 - 5{,}854 = 3{,}316$ *см*

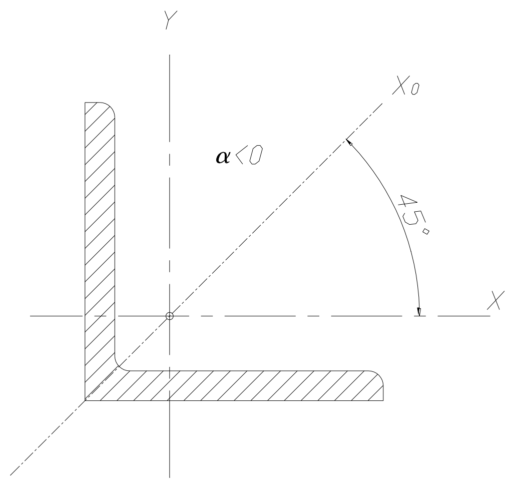
$b_3 = x_3 - x_c = 3{,}2 - 5{,}854 = -2{,}654$ *см*

$J_x = \Sigma J_{xi} = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} = J_{x1} + A_1 \cdot a_1^{\ 2} + J_{x2} + A_2 \cdot a_2^{\ 2} + J_{x3} + A_3 \cdot a_3^{\ 2} = 73{,}4 +$
$+ 12{,}3 \cdot (-2{,}455)^2 + 73{,}4 + 12{,}3 \cdot 1{,}805^2 + 350 + 14{,}7 \cdot 0{,}545^2 = 583{,}269$ *см*^{4}
$J_y = \Sigma J_{yi} = J_y^I + J_y^{II} + J_y^{III} = J_{y1} + A_1 \cdot b_1^{\ 2} + J_{y2} + A_2 \cdot b_2^{\ 2} + J_{y3} + A_3 \cdot b_3^{\ 2} = 73{,}4 +$
$+ 12{,}3 \cdot (-0{,}144)^2 + 73{,}4 + 12{,}3 \cdot (3{,}316)^2 + 27{,}9 + 14{,}7 \cdot (-2{,}654)^2 = 413{,}747$ *см*^{4}

Центробежный момент инерции:

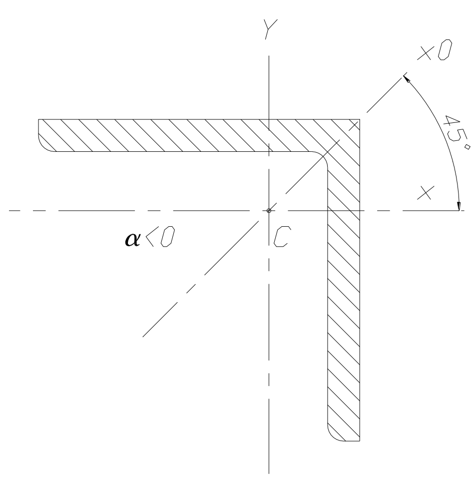
$$J_{x_1 y_1} = J_{x_0 y_0} + A \cdot a \cdot b$$

Для уголка *I*:



$$J_{xy} = \frac{J_{x0} - J_{y0}}{2} \cdot sin2\alpha = \frac{116 - 30{,}3}{2}(-1) = -42{,}85 \text{ см}^4$$

Для уголка *II:*



$$J_{xy} = \frac{J_{x0} - J_{y0}}{2} \cdot sin2\alpha = \frac{116 - 30{,}3}{2}(-1) = -42{,}85 \text{ см}^4$$

Для двутавра центробежный момент инерции нулю, так как собственные центральные оси двутавра являются главными осями.

Для всего сечения:

$$J_{xy} = J_{x_1y_1} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + J_{x_2y_2} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2 + A_3 \cdot a_3 \cdot b_3 =$$

$$= -42{,}85 + 12{,}30 \cdot (-2{,}455) \cdot (-0{,}144) - 42{,}85 + 12{,}3 \cdot 1{,}805 \cdot 3{,}316 +$$

$$+14{,}7 \cdot 0{,}545 \cdot (-2{,}654) = -28{,}994 \text{ см}^4$$

Направление главных центральных осей:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot (-28{,}994)}{413{,}747 - 583{,}269} = \frac{-57{,}988}{-169{,}522} = 0{,}342$$

$$2\alpha_0 = 19^\circ \qquad \alpha_0 = 9^\circ 30'$$

Откладываем угол α_0 против часовой стрелки и проводим главные центральные оси U и V:

Вычисляем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_x - J_y\right)^2 + 4J_{xy}^2}$$

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{583{,}269 + 413{,}747}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(583{,}269 - 413{,}747)^2 + 4 \cdot (-28{,}994)^2} =$$

$$= 498{,}508 \pm 89{,}583$$

$$J_{max} = 588{,}091 \text{ см}^4 \qquad J_{min} = 408{,}925 \text{ см}^4$$

так как $J_x > J_y$, то J_{max} относительно главной оси U, J_{min} относительно главной оси V.

Проверка:

$J_{uv} = J_{xy} \cdot cos2\alpha - 0{,}5(J_y - J_x) \cdot sin2\alpha = -28{,}994 \cdot 0{,}9455 - 0{,}5(413{,}747 - 583{,}269) \cdot 0{,}3256 \approx 0$