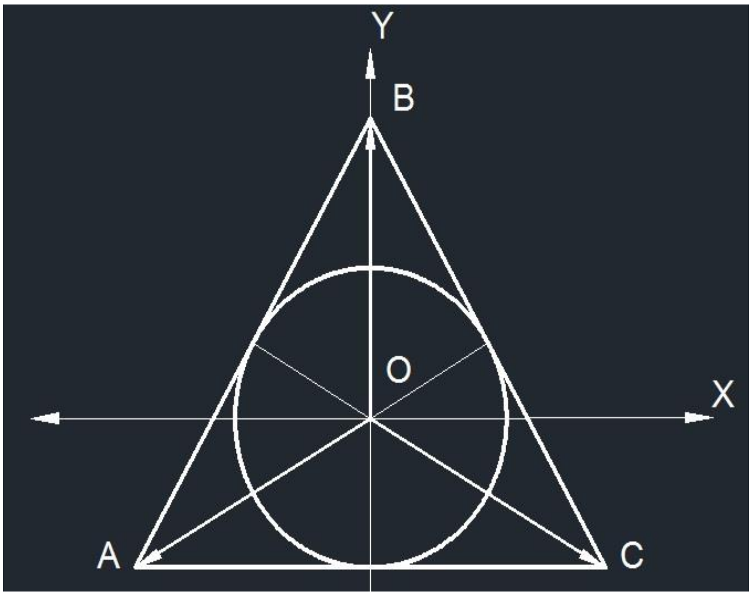
Задача №1

В треугольнике ABC со сторонами BC = a, AC = b, и AB = c точка O является центром вписанной окружности. Докажите, что $a\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Так как в любой треугольник можно вписать окружность, то выберем базис декартовой системы координат так, чтобы нуль базиса совпадал с центром вписанной окружности (она же точка пересечения биссектрис треугольника). Так как треугольник плоская фигура достаточно одной плоскости размещения XOY.

В выбранном базисе точки вершин треугольника будут иметь координаты:

$$\begin{cases} A\left(A_x; A_y\right) \\ B\left(0; B_y\right) \\ C\left(C_x; C_y\right) \end{cases}.$$

1. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:
   $\overrightarrow{OA} = (A_x - 0)\vec{\imath} + \left(A_y - 0\right)\vec{\jmath};$
   $\overrightarrow{OB} = (0 - 0)\vec{\imath} + \left(B_y - 0\right)\vec{\jmath};$
   $\overrightarrow{OC} = (C_x - 0)\vec{\imath} + \left(C_y - 0\right)\vec{\jmath};$

   То есть,

   $\overrightarrow{OA}\left\{A_x; A_y\right\};$

   $\overrightarrow{O\mathrm{B}}\left\{0; B_y\right\};$

   $\overrightarrow{O\mathrm{C}}\left\{C_x; C_y\right\}.$

2. Так как точка O (центр окружности) также является точкой пересечения биссектрис любого треугольника, а вектора $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ фактически являются направляющими векторами прямой, прямой совпадающей с отрезком биссектрис треугольника[1], то имеем три пересекающиеся прямые. Они могут лежать только в одной плоскости (через пары таких прямых возможно провести только одну плоскость) – плоскости треугольника. Соответственно вектора $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ также лежат в этой плоскости. А, тогда – они компланарны.

[1] Понятие отрезок используется, так как по-определению биссектриса – луч.

Формально, доказательство компланарности векторов можно провести и другим путём[2].

Найдём смешанное произведение векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ по базису $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$:

$$\left(\overrightarrow{OA}, [\,\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right) = \begin{vmatrix} 0 & B_y & 0 \\ A_x & A_y & 0 \\ C_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = 0 * \begin{vmatrix} A_y & 0 \\ C_y & 0 \end{vmatrix} = 0 * \left(A_y * 0 - 0 * C_y\right) = 0.$$

Так как смешанное произведение трёх векторов равно нулю – вектора компланарны.

3. Известно, что для того, чтобы вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Итак, вектора $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ линейно зависимы. Тогда имеет место следующая линейная комбинация:

$a\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где a,b,c – не все нули.

4. Для отыскания коэффициентов a,b,c составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a * A_x + b * 0 + c * C_x = 0 \\ a * A_y + b * B_y + c * C_y = 0; \\ a * 0 + b * 0 + c * 0 = 0 \end{cases}$$

Выберем второе уравнение:

$a * A_y + b * B_y + c * C_y = 0;$

Так как любой треугольник в выбранном базисе можно расположить так, что две вершины будут располагаться на одной прямой, то ординаты двух любых вершин совпадут (пусть это будут точки A и B). При этом ордината одной вершины будет всегда положительна, а ординаты двух других отрицательны.

Применим эти факты к уравнению:

$$\begin{cases} a * A_y + b * B_y + c * C_y = 0 \\ A_y = C_y \\ A_y < 0 \end{cases};$$

Получаем:

$-A_y * (a + c) + b * B_y = 0;$

$b * B_y = A_y * (a + c);$

Откуда:

$\frac{B_y}{A_y} = \frac{a+c}{b};$

[2] Это доказательство предпочтительней.

Рассмотрим биссектрису угла ABC. По свойству биссектрис треугольника точка O (инцентр) делит биссектрису угла ABC в отношении:

$$\frac{B_y}{A_y} = \frac{AB+BC}{AC};$$

Так как длина любой стороны треугольника не превосходит сумму длин двух других сторон, то:

$$\frac{B_y}{A_y} = \frac{AB+BC}{AC} \geq 1;$$

Откуда следует, что:

$$\frac{a+c}{b} = \frac{B_y}{A_y} \geq 1;$$

Соответственно:

$$a + c \geq b;$$

Таким образом в линейной комбинации векторов, числа a,b,c могут являться длинами сторон треугольника, так как для них выполнено неравенство треугольника.

То есть, действительно имеет место, следующая линейная комбинация:

$a\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где a=BC, b=AC, c=AB.[3]

[3] При условии, что ABC- треугольник, точка O – центр вписанной окружности в треугольник ABC.

						Лист
						3

Задача №2

Доказать: для того, чтобы три точки A ($r1^{\rightarrow}$), B($r2^{\rightarrow}$), C ($r3^{\rightarrow}$) лежали на одной прямой, необходимо и достаточно существование трех чисел $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, не равных одновременно нулю и таких, что $\alpha 1 r1^{\rightarrow}$ +$\alpha 2 r2^{\rightarrow}$ +$\alpha 3 r3^{\rightarrow}$ = 0 и $\alpha 1$+$\alpha 2$+$\alpha 3$=0.

1. Достаточное условие (из линейной зависимости векторов следует их коллинеарность).

Так как точки три то на прямой могут образоваться только три вектора:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1};$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2};$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_1};$

Так как третий вектор можно выразить через два остальных, достаточно доказать, что пара любых векторов коллинеарна. Пусть это будут вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.

Из линейно зависимой комбинации выразим вектор $\overrightarrow{r_3}$:

$a_1 * \overrightarrow{r_1} + a_2 * \overrightarrow{r_2} + a_3 * \overrightarrow{r_3} = \vec{0};$

$\overrightarrow{r_3} = \frac{-a_1 * \overrightarrow{r_1} - a_2 * \overrightarrow{r_2}}{a_3};$

Таким образом:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2} = \frac{-a_1 * \overrightarrow{r_1} - a_2 * \overrightarrow{r_2}}{a_3} - \overrightarrow{r_2};$

Выразим коэффициент a_1

$a_1 + a_2 + a_3 = 0;$

$-a_1 = a_2 + a_3;$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2} = \frac{-a_1 * \overrightarrow{r_1} - a_2 * \overrightarrow{r_2}}{a_3} - \overrightarrow{r_2} = \frac{a_2 + a_3}{a_3} \overrightarrow{r_1} - \frac{a_2}{a_3} \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_2};$

$\overrightarrow{BC} = \frac{a_2}{a_3} \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_1} - \frac{a_2}{a_3} \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_2} = \frac{a_2}{a_3} (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) + (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2});$

$\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) * \frac{a_2 + a_3}{a_3} = -\frac{a_1}{a_3} (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) = +\frac{a_1}{a_3} (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1});$

Но $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{AB}$, поэтому

$\overrightarrow{BC} = \frac{a_1}{a_3} \overrightarrow{AB}$, где $\frac{a_1}{a_3} \in \mathbb{R}$

А это и означает, что вектора коллинеарны (их координаты пропорциональны), а значит все их точки лежат на одной прямой.

2. Необходимое условие (из коллинеарности векторов следует их линейная зависимость).

Так как теперь три точки лежат на одной прямой, то вектора коллинеарны.

При этом они могут быть, как сонаправленны, так и противоположно направлены:

a. $\overrightarrow{BC} \upuparrows \overrightarrow{AB}$, тогда, на основании теоремы об одинаково направленных векторах $\overrightarrow{AB} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} * \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = +\lambda * \overrightarrow{BC}$, где $\lambda \in \mathbb{R}_+$

b. $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, тогда, на основании теоремы о противоположно направленных векторах $\overrightarrow{AB} = -\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} * \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\lambda * \overrightarrow{BC}$, где $\lambda \in \mathbb{R}_-$

Таким образом возможно только:

$\overrightarrow{AB} = \pm\lambda * \overrightarrow{BC};$

Распишем вектора через радиус-вектора их точек:

$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \pm\lambda * (\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2});$

$-\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} * (1 \pm \lambda) \mp \overrightarrow{r_3} = \vec{0};$

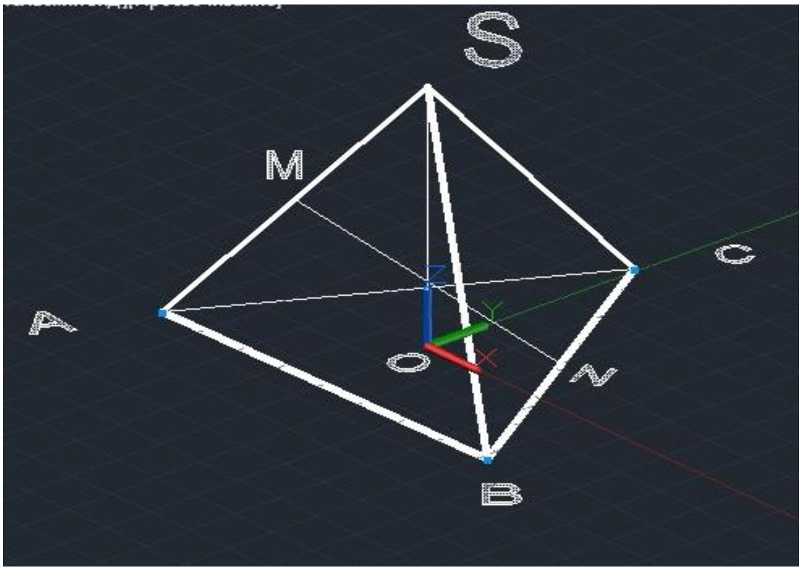
На основании $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, получаем

$a_1 = -1;\ a_2 = \{0; 2\};\ a_3 = \{-1; +1\};$

То есть не все нули одновременно.

Задача №3

В тетраэдре SABC точки M и N являются серединами ребер SA и BC соответственно. Докажите, что прямые AC, MN, SB параллельны одной плоскости.



Пусть вектор $\overrightarrow{SC}$ имеет координаты $\{S_x - C_x; S_y - C_y; S_z - C_z\}$, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\}$, тогда вектор $\overrightarrow{MN}$, так как его начало и конец лежат на серединах ребер AS и BC будет иметь координаты:

M= $\frac{1}{2} * (S_x + A_x; S_y + A_y; S_z + A_z)$

N= $\frac{1}{2} * (B_x + C_x; B_y + C_y; B_z + C_z)$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} * \{B_x + C_x - S_x - A_x; B_y + C_y - S_y - A_y; B_z + C_z - S_z - A_z\};$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} * \{(B_x - A_x) + (C_x - S_x); (B_y - A_y) + (C_y - S_y); (B_z - A_z) + (C_z - S_z)\};$$

То есть,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} * (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC})$$

Найдём смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}) = ([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}], \overrightarrow{SC}) = *$$

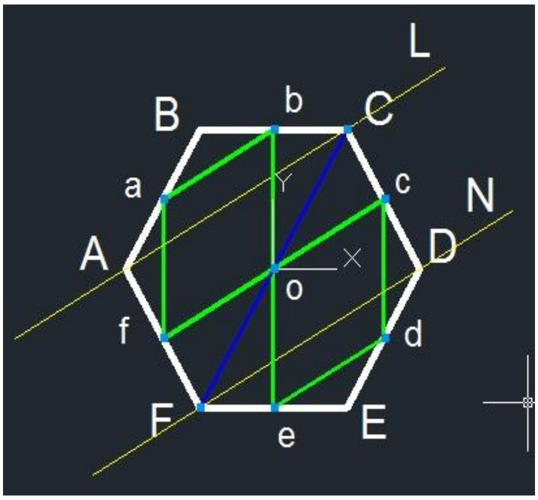
$$* [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}] = \left[\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2} * (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC})\right] = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}]}{2} = \frac{1}{2} * [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}]$$

$$= \left(\frac{1}{2} * [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}], \overrightarrow{SC}\right) = \frac{1}{2} * ([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}], \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2} * (\overrightarrow{AB}, [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SC}]) = 0.$$

Итак, смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ равно нулю, следовательно они параллейны одной плоскости (либо лежат в одной плоскости).

Задача №4

Докажите, что если в пространственном шестиугольнике ABCDEF (точки A, B, C, D, E, F не лежат в одной плоскости) противоположные стороны попарно параллельны, то середины его сторон лежат в одной плоскости.



Через точки F и C проходит прямая которая делит шестиугольник на два четырёхугольника. Рассмотрим, например пространственный четырехугольник ABCF.

Прямая L делит его на два треугольника: ABC, ACF.

Так как точка a - середина AB, точка b - середина BC, точка f - середина AF, точка o - середина OC, то отрезок ab – средняя линия треугольника ABC (и потому параллелен прямой L), отрезок fo – средняя линия треугольника ACF (и потому параллелен прямой L).

Итак оба отрезка параллельны одной прямой, следовательно и паралле́йны между собой (потому лежат в одной плоскости). По тем же причинам паралле́йны отрезки af и bo (это средние лини треугольников FAB и FBC).

Так как через три точки, не лежащие на одной прямой, (например, f, a ,b) можно провести только одну плоскость, то все отрезки лежат в этой плоскости.

Полученная плоская фигура abof – параллелограмм (две стороны попарно паралле́йны и все точки компланарны).

Аналогично можно показать, что фигурф cdeo - также является параллелограммом.

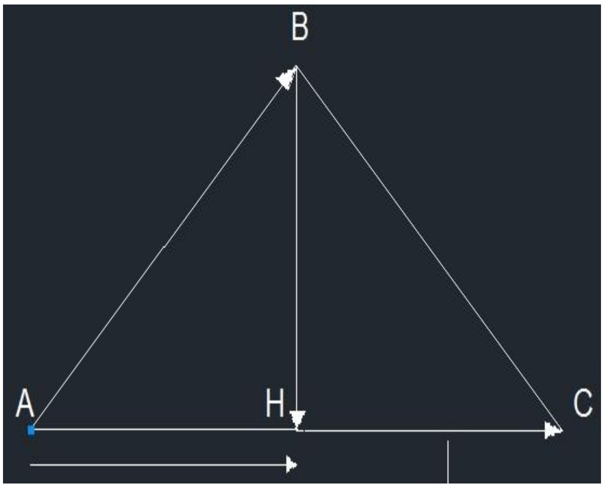
Эти фигуры (их можно рассматривать как части общей плоскости) либо пересекаются по прямой be, либо принадлежат одной плоскости.

Так как BC∥FE, то через них можно провести плоскость и при том только одну. В эту плоскость включатся точки B,C,F,E, а также диагонали параллелограммов - fb и ce (так как минимум две их точки будут принадлежать плоскости).

Но диагонали параллелограммов лежат в одной плоскости – плоскости фигуры. Поэтому оба параллелограмма будут содержаться в этой плоскости. А значит все указанные точки лежат в одной плоскости.

Задача №5

Выразите вектор $BH^{\rightarrow}$, совпадающий с высотой треугольника ABC, через векторы $AB^{\rightarrow}=c$ и $AC^{\rightarrow}=b^{\rightarrow}$.



Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, означает разложить его по базису $\{\vec{b},\vec{c}\}$, т.е. найти такие числа α и β , что:

$$\overrightarrow{BH} = \alpha * \vec{b} + \beta * \vec{c};$$

Так как точка H лежит на прямой AC то вектор $\overrightarrow{AC}$ будет коллинеарен вектору $\overrightarrow{AH}$, то есть существует такое число μ, что:

$$\overrightarrow{AH} = \mu * \overrightarrow{AC};$$

Так как вектор $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \mu * \overrightarrow{AC} ;$$

То есть, $\alpha = -1, \beta = \mu$

Так высота треугольника опускается на противоположную сторону перпендикулярно, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{AC}$ должно равняться нулю.

$$\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{AC}\right) = \left(-\overrightarrow{AB} + \mu * \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) + \mu * \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\right) = 0;$$

Откуда,

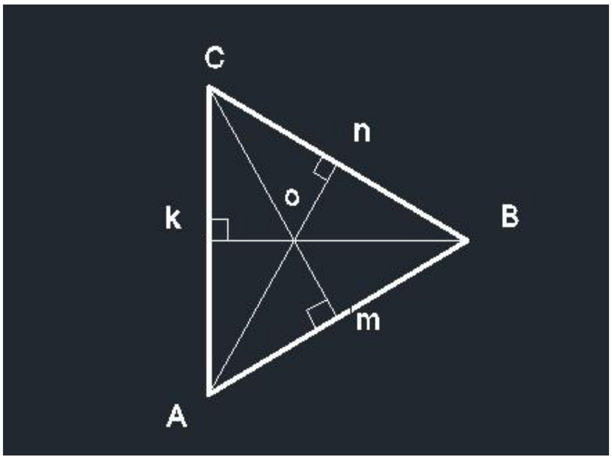
$$\mu = \frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{AC^2};$$

Таким образом, получаем:

$$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{AC^2} * \overrightarrow{AC} = -\vec{c} + \frac{\left(\vec{b},\vec{c}\right)}{c^2} * \vec{b}.$$

Задача №6

Докажите, что перпендикуляры, восстановленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке.



Δ ABC,

m, n, k — серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC, AC

Сначала докажем, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Предположим, что m и k не пересекаются. Тогда m ∥ k.

$$\left.\begin{array}{l} AC\perp k \\ k \parallel m \end{array}\right\} \Rightarrow AC\perp m$$

$$\left.\begin{array}{l} AC\perp m \\ AB\perp m \end{array}\right\} \Rightarrow AC \parallel AB$$

Но прямые AB и AC пересекаются в точке A. Пришли к противоречию. Следовательно, прямые m и k пересекаются.

Обозначим точку пересечения прямых m и k как O.

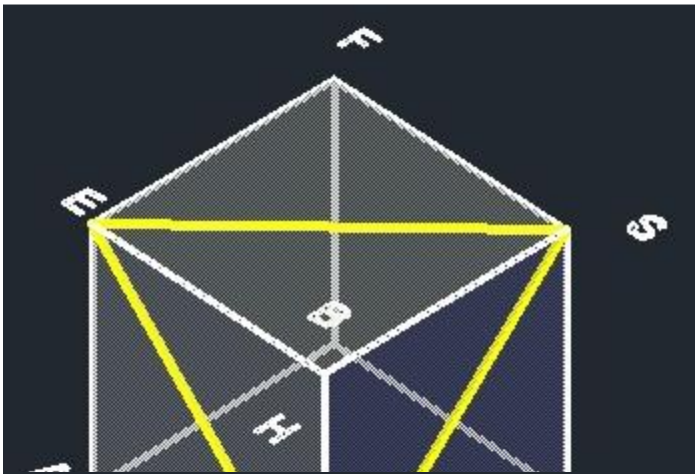
По свойству серединного перпендикуляра к отрезку AO=OC и AO=BO. Следовательно, и OC=BO. Значит, точка O равноудалена от концов отрезка BC, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре n к этому отрезку. Таким образом, все три серединных перпендикуляра m, n, k к сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке O.

Задача №7

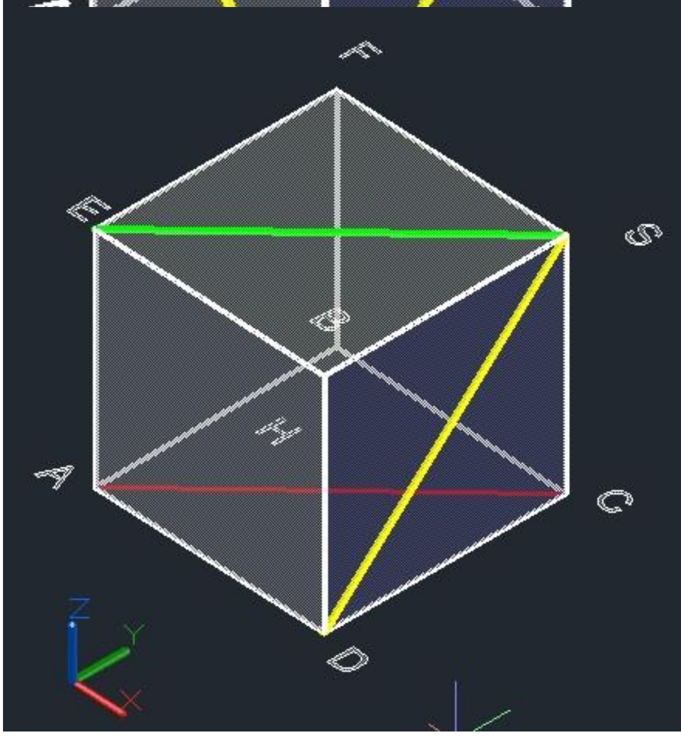
В кубе найти:

а) угол между диагоналями двух соседних граней, исходящими из одной точки;

б) угол между диагоналями двух соседних граней, не имеющими общей точки.



Так как куб — правильный многогранник, в независимости от размещения данных диагоналей, достаточно рассмотреть такой треугольник, который образован из двух данных диагоналей и еще одной, которая соединяет концы данных диагоналей.У куба все грани — равные квадраты, диагонали которых одинаковы. Треугольник равносторонний, угол между *SE* и *SD* равен 60°.



Так как куб — правильный многогранник, в независимости от размещения данных диагоналей, достаточно рассмотреть диагонали, отмеченные жёлтым и красным. Они скрещивающиеся, поэтому переместим их в одну плоскость, передвигая красную диагональ на зелёную. Получилась уже рассмотренная ситуация, и угол между *SE* и *SD* равен 60°.