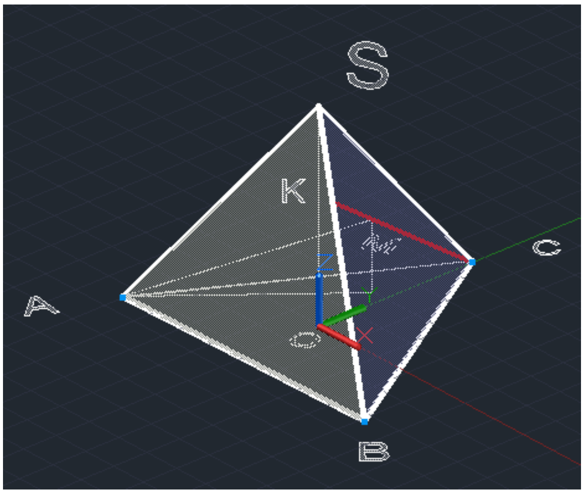
Задача №8

54. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна h, а плоские углы при её вершине S равны по $60°$. Точка M лежит на боковой грани BSC, причём, прямая CM пересекает сторону SB в такой точке K, что $CM : MK = 2 : 1$ и $SK : KB = 1 : 2$. Найти расстояние от точки M до основания ABC и угол между прямой AM и плоскостью основания ABC.



Так как плоский угол при основании равен 60, то пирамида – есть правильный тетраэдр. Точка O будет находится в точке пересечения медиан основания, туда же проецируется высота.

Запишем координаты точек в выбранном базисе, учитывая, что a – длина ребра:

$S\ (0; 0; h);$

$A\ (-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0);$

$C\ (0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0);$

$B\ (\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0);$

Запишем координаты векторов:

$\overrightarrow{OS}\{0; 0; h\};$

$\overrightarrow{OA}\left\{-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right\};$

$\overrightarrow{OC}\left\{0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right\};$

$\overrightarrow{OB}\left\{\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right\};$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BS}$:

$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB};$

$\overrightarrow{BS}\ \left\{\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; h\right\};$

$\overrightarrow{KS} = \frac{1}{3} * \overrightarrow{BS} = \frac{1}{3} * \left\{\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; h\right\} = \left\{\frac{a}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{18}; \frac{h}{3}\right\};$

Откуда координаты точки K:

$$\begin{cases} K_x = S_x - \frac{a}{6} = -\frac{a}{6} \\ K_y = S_y + \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{18}; \\ K_z = S_z - \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h \end{cases}$$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{CK}$:

$$\overrightarrow{CK}\left\{-\frac{a}{6}; \frac{\sqrt{3}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}h\right\} = \left\{-\frac{a}{6}; -\frac{5\sqrt{3}}{18}; \frac{2}{3}h\right\};$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} * \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3} * \left\{-\frac{a}{6}; -\frac{5\sqrt{3}}{18}; \frac{2}{3}h\right\} = \left\{-\frac{a}{9}; -\frac{5\sqrt{3}}{27}; \frac{4h}{9}\right\};$$

Откуда координаты точки M:

$$\begin{cases} M_x = C_x - \frac{a}{9} = -\frac{a}{9} \\ M_y = C_y - \frac{5\sqrt{3}}{27} = \frac{4\sqrt{3}}{27}; \\ M_z = C_z + \frac{4h}{9} = \frac{4h}{9} \end{cases}$$

Составляем уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - A_x & y - A_y & z - A_z \\ C_x - A_x & C_y - A_y & C_z - A_z \\ B_x - A_x & B_y - A_y & B_z - A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + \frac{a}{2} & y + \frac{\sqrt{3}}{6} & z \\ \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}z = 0;$$

Находим расстояние от точки M до плоскости ABC:

$$d = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{4h}{9}}{\sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{4h}{9};$$

Находим координаты направляющего вектора прямой AM:

$$\overrightarrow{AM}\left\{\frac{7a}{9}; \frac{17\sqrt{3}}{54}; \frac{4h}{9}\right\};$$

Находим угол между прямой AM и плоскостью ABC:

$$\sin\varphi = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{4h}{9}}{\sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} * \sqrt{\left(\frac{7a}{9}\right)^2 + \left(\frac{17\sqrt{3}}{54}\right)^2 + \left(\frac{4h}{9}\right)^2}} = \frac{\frac{4h}{9}}{\sqrt{\left(\frac{7a}{9}\right)^2 + \left(\frac{17\sqrt{3}}{54}\right)^2 + \left(\frac{4h}{9}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{4h}{9}}{\frac{1}{9}\sqrt{(7a*6)^2+\left(17\sqrt{3}\right)^2+(4*6h)^2}} = \frac{\frac{4h}{9}}{\frac{1}{9}\sqrt{(7a*6)^2+\left(17\sqrt{3}\right)^2+(4*6h)^2}} \left| \text{При } a = \sqrt{\frac{3}{2}} * h \right| =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{\left(7*\sqrt{\frac{3}{2}}*h*6\right)^2+\left(17\sqrt{3}\right)^2+(4*6h)^2}} = \frac{4h}{\sqrt{\frac{(7^2*3*h^2*6^2)+17^2*6+\left(4^2*2*6^2*h^2\right)}{2}}} = \frac{4h}{\sqrt{6}*\sqrt{\frac{(7^2*3*h^2*6)+17^2+\left(4^2*2*6*h^2\right)}{2}}} =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}*\sqrt{(7^2*3*6+4^2*2*6)*h^2+17^2}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{1074*h^2+17^2}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{(1024+50)*h^2+(32-15)^2}} =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{1024*h^2+50*h^2+32^2-30*32+15^2}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32^2*h^2+32*h^2+32^2-30*32+18*h^2+(16-1)^2}} =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32^2*h^2+32*h^2+32^2-30*32+18*h^2+7*32+1}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}\sqrt{32^1*h^2+h^2+32^1-30+\frac{9}{16}*h^2+7+\frac{1}{32}}} =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}\sqrt{33*h^2+\frac{9}{16}*h^2+32^1-30+7+\frac{1}{32}}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}\sqrt{\frac{528}{9}*\frac{9}{16}*h^2+\frac{9}{16}*h^2+\frac{144}{9}*\frac{9}{16}+\frac{1}{18}*\frac{9}{16}}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}*\frac{3}{4}*\sqrt{\frac{528}{9}*h^2+h^2+\frac{144}{9}+\frac{1}{18}}} =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}*\frac{3}{4}*\sqrt{\frac{529}{9}*h^2+\frac{8}{9}h^2+\frac{144}{9}+\frac{1}{18}}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}*\frac{3}{4}*\sqrt{\frac{27-12}{3}*h^2+\frac{8}{9}h^2-\frac{2*27*12}{9}+\frac{1}{18}}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}*\frac{3}{4}*\sqrt{(5h)^2+\frac{8}{9}h^2-72+\frac{1}{18}}} =$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}*\frac{1}{4}*\sqrt{9*(5h)^2+8h^2-8+\frac{1}{2}}} = \frac{4h}{\sqrt{3}\sqrt{32}*\frac{1}{4}*\sqrt{(7h)^2+240-8+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{(h)^2+5*\frac{93}{98}}}$$

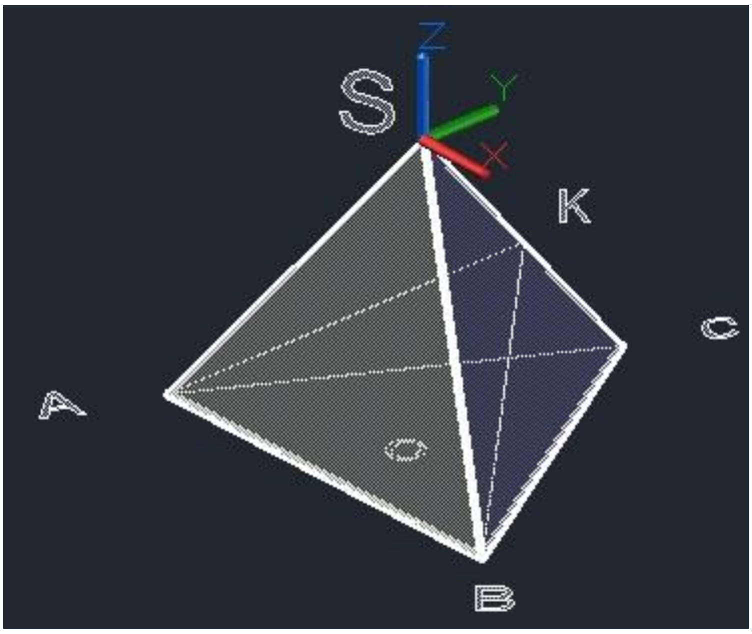
Таким образом, получены следующие ответы:

Расстояние от точки до плоскости: $d = \frac{4h}{9}$

Угол между прямой и плоскостью: $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{(h)^2+5*\frac{93}{98}}}\right)$

Задача №9

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а длина бокового ребра равна a. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного бокового ребра.



Так как боковые грани правильной треугольной пирамиды по -определению являются равными <u>равнобедренными (не равносторонними)</u> треугольниками, то рассмотрим к примеру треугольник ASC.

Итак этот треугольник равнобедренный, при том, он равен треугольнику BSC. На основании равенства этих треугольников можно заключить, что их медианы AK и BK равны, поэтому треугольник AKB, окажется также равнобедренный. Площадь этого треугольника необходимо найти. Найдём эту площадь как полупроизведение основания треугольника на его высоту.

$S_{AKB} = \frac{1}{2}KH * AB,$ где $(.)H \in AB$

Сторону AK (медиана треугольника ASK) найдём по теореме косинусов:

$$AK = \sqrt{AS^2 + SK^2 - 2 * AS * SK * \cos(ASC)} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 * a * \frac{a}{2} * \cos(\alpha)} =$$
$$= \frac{a}{2} * \sqrt{5 - 4\cos(\alpha)};$$

Сторону KH найдём из треугольника AKB (учитывая, что он равнобедренный, т.е. что высота проведённая из вершины K равна медиане и биссектрисе одновременно):

$$KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{AK^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

Сторону AB (основание треугольника ASB) найдём по теореме косинусов: $AB = \sqrt{AS^2 + SB^2 - 2 * AS * SB * \cos(ASB)} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 * a * a * \cos(\alpha)} = \quad = \sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos(\alpha)};$

Итак,

$$KH^2 = \frac{a^2}{4} * [5 - 4\cos(\alpha)] - \frac{2 * a^2}{4} * [1 - \cos(\alpha)] = \frac{a^2}{4} * [3 - 2\cos(\alpha)];$$

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} KH * AB = \frac{\sqrt{2} * a^2}{4} * \sqrt{[3 - 2\cos(\alpha)] * [1 - \cos(\alpha)]} = \frac{\sqrt{2} * a^2}{4} * \sqrt{2\cos^2(a) - 5\cos(\alpha) + 3} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 * \sqrt{2} * \sqrt{2\cos^2(a) - 5\cos(\alpha) + 3}.$$

$$S_{AKB} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 * \sqrt{2} * \sqrt{2\cos^2(a) - 5\cos(\alpha) + 3}$$