Содержание

						Лист
						2
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Реферат

Курсовая работ 28 с.14 рис.12 ,0 табл., 12 источников. Иллюстративная часть работы 12 листов формата А4

МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА, МАТЕРИАЛЬНОЕ ТЕЛО, МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, РЕАКЦИИ, РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА, КИНЕМАТИКА ТЕЛ, ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ, ЗАКОНЫ НЬЮТОНА, ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ, УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА, РАБОТА, ОБОБЩЕННАЯ СИЛА

Объектом статического, кинематического и динамического исследования являются материальные точки, тела и механические системы.

Цель работы – изучение и практическое применение законов, теорем, принципов и методов исследования механических объектов.

В процессе работы проводились расчеты и исследования различных механических систем.

В результате исследования определены реакции и законы движения материальных точек и тел различных механических систем.

						Лист
						3
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Задача 5.1. Произвольная плоская система сил

5.1.1. Условие задачи

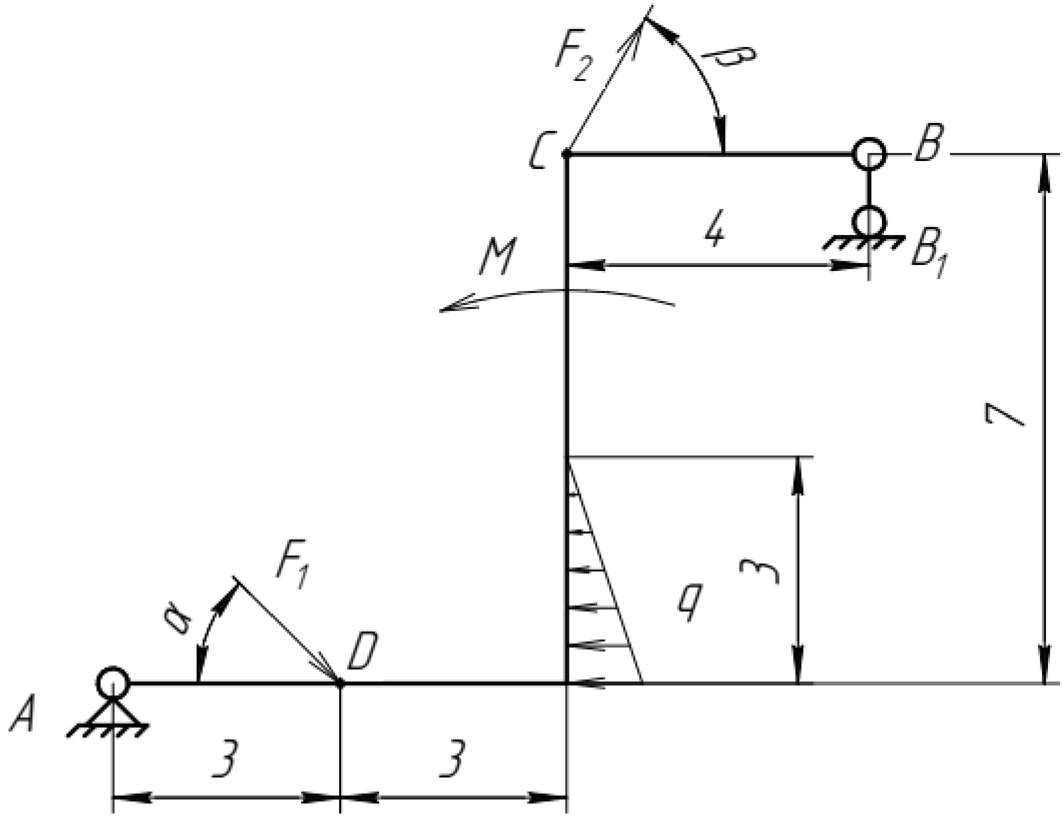

Рисунок 1.

Исходные данные:

$F_1 = 14H; F_2 = 26H.$

$M = 35H \cdot м.$

$q = 2\dfrac{H}{м}.$

$\alpha = 45^\circ; \beta = 60^\circ.$

Определить:

R_A, R_B

5.1.2. Решение

Для решения задачи составим расчетную схему (Рисунок 2.). В точке А закреплён неподвижный шарнир, который накладывает две связи на раму. В точке В закреплен подвижный шарнир, который ограничивает перемещение рамы только в вертикальном направлении.

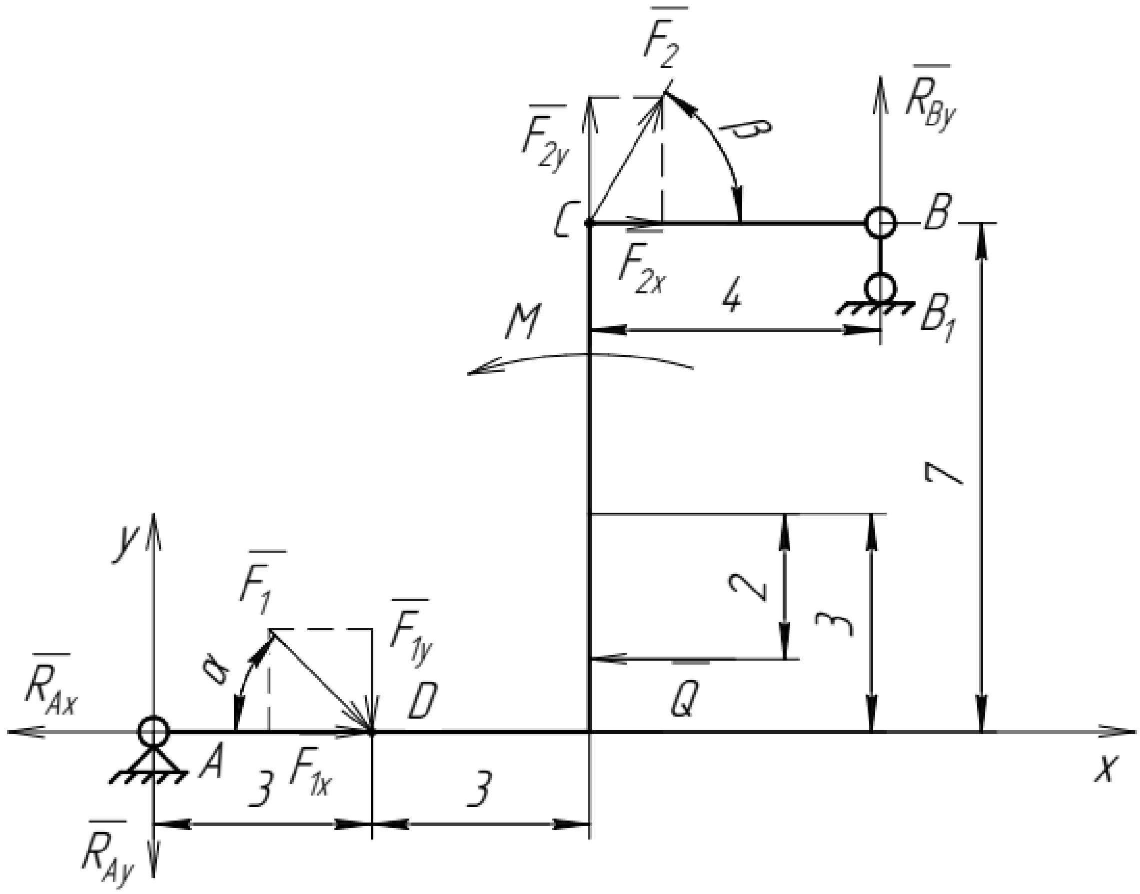

Рисунок 2.

Распределенную нагрузку интенсивностью $\bar{q}$ заменим сосредоточенной силой $\overline{Q}$. А заданные векторы сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ спроецируем на введенные оси координат X,Y. Тогда:

$$
\begin{aligned}
&Q = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3H \\
&F_{1X} = F_1 \cdot \cos\alpha = 14 \cdot \cos 45^\circ = 9{,}89H \\
&F_{1Y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 14 \cdot \sin 45^\circ = 9{,}89H \qquad (1) \\
&F_{2X} = F_2 \cdot \cos\beta = 26 \cdot \cos 60^\circ = 13H \\
&F_{2Y} = F_2 \cdot \sin\beta = 26 \cdot \sin 60^\circ = 22{,}5H
\end{aligned}
$$

Для получения плоской системы сил составим три уравнения равновесия, при этом для вычисления момента сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ воспользуемся теоремой Вариньона. Тогда получим:

$$\sum F_{iX} = 0, \quad -R_{AX} + F_{1X} + F_{2X} - Q = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_{iY} = 0, \quad -R_{AY} + R_{BY} - F_{1Y} + F_{2Y} = 0 \qquad (3)$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_{AX} \cdot 7 + R_{AY} \cdot 10 - F_{2Y} \cdot 4 - Q \cdot 5 + F_{1X} \cdot 7 + F_{1Y} \cdot 7 + M = 0 \qquad (4)$$

Из (2) имеем:

$$R_{AX} = F_{2X} + F_{1X} - Q = 13 + 9,89 - 3 = 19,89H \qquad (5)$$

Подставим (5) в (4) и найдем R_{AY} :

$$R_{AY} = \frac{R_{AX} \cdot 7 + F_{2Y} \cdot 4 + Q \cdot 5 - F_{1X} \cdot 7 - F_{1Y} \cdot 7 - M}{10} = \frac{19,89 \cdot 7 + 22,5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 9,89 \cdot 7 - 9,89 \cdot 7 - 35}{10} = 7,077H \qquad (6)$$

Подставим (6) в (3) и найдем R_{BY}:

$$R_{BY} = F_{1Y} - F_{2Y} + R_{AY} = 9,89 - 22,5 + 7,077 = -5,533H \qquad (7)$$

Выполним проверку полученных сил реакций связей:

$$\begin{aligned}&\sum M_C = 0, R_{AY} \cdot 6 - R_{AX} \cdot 7 + F_{1Y} \cdot 3 + F_{1X} \cdot 7 - Q \cdot 5 + R_{BY} \cdot 4 + M = \\ &= 7,077 \cdot 6 - 19,89 \cdot 7 + 9,89 \cdot 3 + 9,89 \cdot 7 - 3 \cdot 5 - 5,533 \cdot 4 + 35 = -35 + 35 = 0H\end{aligned} \qquad (8)$$

Следовательно, силы реакций связей вычислены правильно.

Вычислим полные реакции в точках А и В:

$$\begin{aligned}&R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{19,89^2 + 7,077^2} = 21,1H \\ &R_B = R_{BY} = -5,533H\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\cos(\overline{R_A} \,^\wedge \overline{X}) = \frac{\overline{R_{AX}}}{\overline{R_A}} = \frac{\overline{19,89}}{\overline{21,10}} = 0,942 \qquad (10)$$

$$(\overline{R_A} \,^\wedge \overline{X}) = 19,6^\circ \qquad (11)$$

Ответ:

$$R_A = 21,1H$$
$$R_B = -5,533H$$

					Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	6

Задача 5.2. Простейшее движение твердого тела

5.2.1. Условие задачи

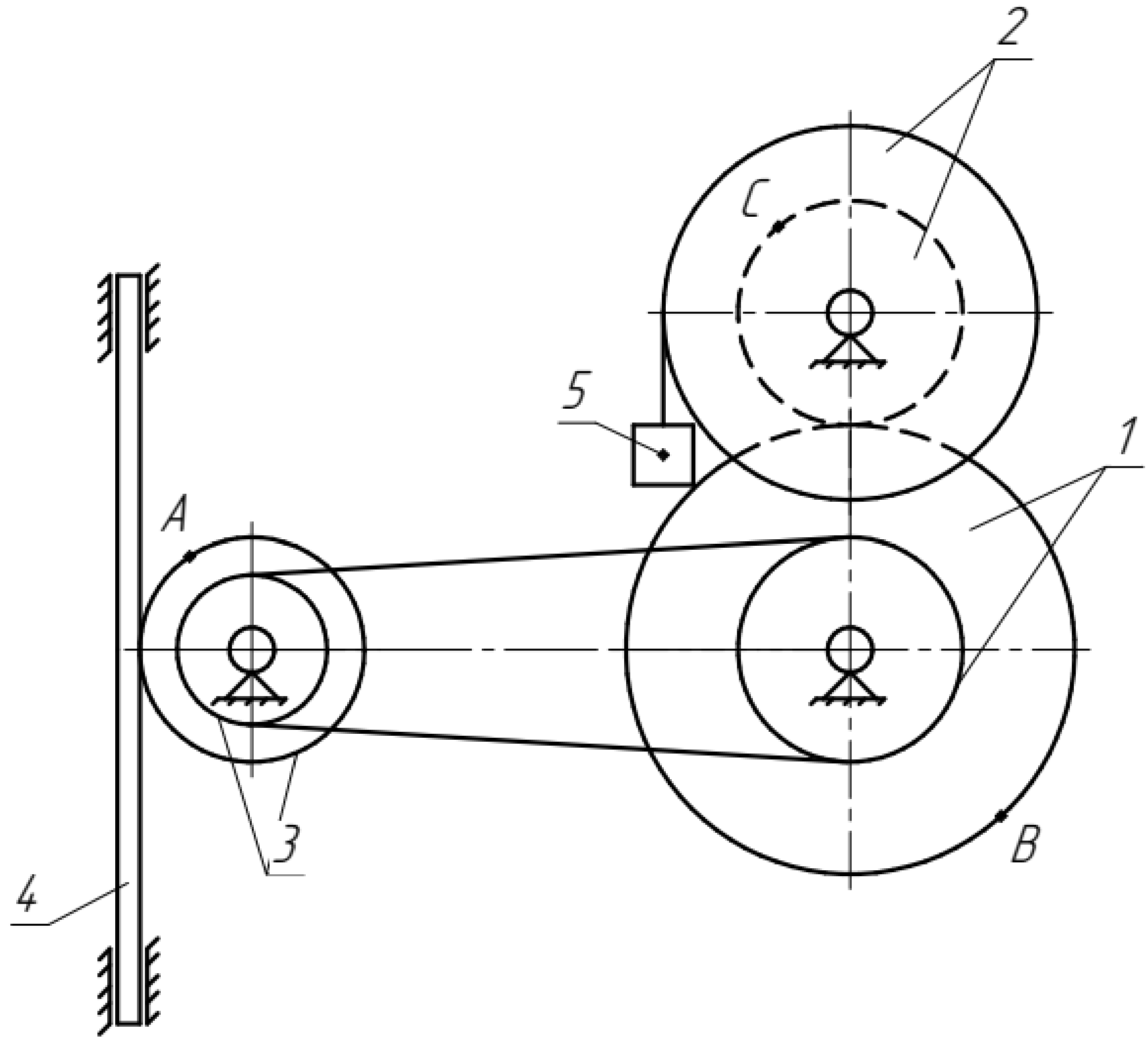

Рисунок 3.

Исходные данные:

$R_1 = 0,6м; r_1 = 0,3м; R_2 = 0,5м; r_2 = 0,3м; R_3 = 0,3м; r_3 = 0,2м.$

$\varphi_2 = 2,5 \cdot t^2 + t$

Определить:

$V_5, V_A, V_B, V_C, V_4 - ?$

$a_5, a_A, a_B, a_C, a_4 - ?$

5.2.2. Решение

Для решения задачи составим расчетную схему (Рисунок 4.).

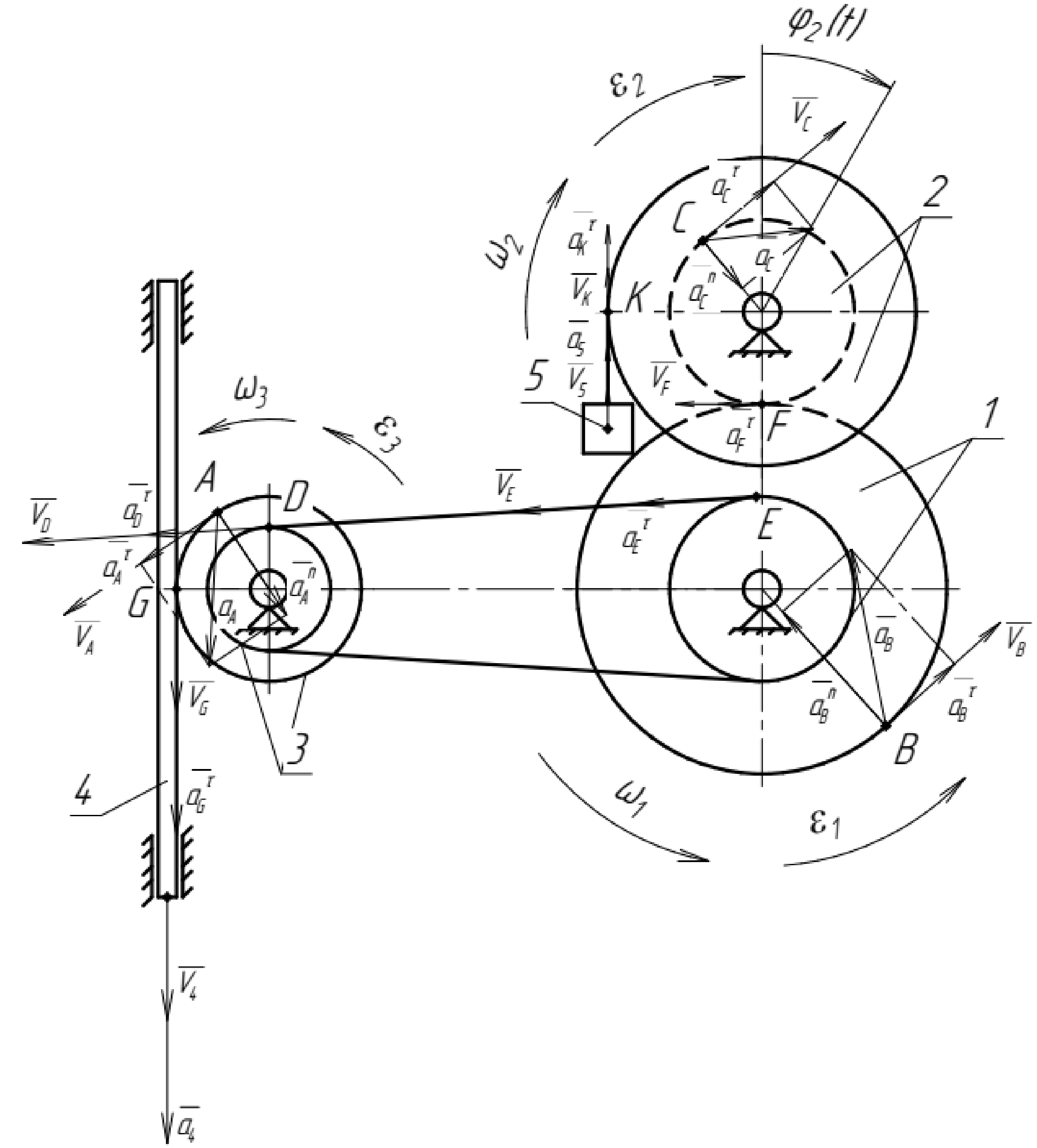

Рисунок 4.

При решении задачи примем следующие допущения:

1. *Ремень и трос нерастяжимые;*
2. *В точке контакта колес, ремня с колесом, рейки и колеса отсутствует проскальзывание.*

Определим угловые скорость и ускорение ступенчатого колеса 2 при t=1 с.:

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = 5 \cdot t + 1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6\frac{рад}{c}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 5\frac{рад}{c^2} \qquad (12)$$

Из полученных результатов в выражениях (12) можно сделать вывод, что ступенчатое колесо 2 движется равноускоренно.

Груз 5 движется поступательно. С учетом допущений 1,2 определим скорость и ускорения груза 5:

$$V_K = \omega_2 \cdot R_2 = 6 \cdot 0,5 = 3\frac{м}{c}$$
$$a_K^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 5 \cdot 0,5 = 2,5\frac{м}{c^2}$$
$$V_5 = V_K = 3\frac{м}{c} \qquad (13)$$
$$a_5 = a_K^\tau = 2,5\frac{м}{c^2}$$

Точка С принадлежи ступенчатому колесу 2 и лежит на меньшем радиусе, тогда:

$$V_C = \omega_2 \cdot r_2 = 6 \cdot 0,3 = 1,8\frac{м}{c}$$
$$a_C^n = \omega_2^2 \cdot r_2 = 6^2 \cdot 0,3 = 10,8\frac{м}{c^2}$$
$$a_C^\tau = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 5 \cdot 0,3 = 1,5\frac{м}{c^2} \qquad (14)$$
$$a_C = \sqrt{\left(a_C^n\right)^2 + \left(a_C^\tau\right)^2} = \sqrt{10,8^2 + 1,5^2} = 10,9\frac{м}{c^2}$$

Определим угловые скорость и ускорение ступенчатого колеса 1. С учетом допущений 1,2 имеем:

$$V_F = V_C = 1,8\frac{м}{c}$$
$$a_F^\tau = a_C^\tau = 1,5\frac{м}{c_2}$$
$$\omega_1 = \frac{V_F}{R_1} = \frac{1,8}{0,6} = 3\frac{рад}{c} \qquad (15)$$
$$\varepsilon_1 = \frac{a_F^\tau}{R_1} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5\frac{рад}{c^2}$$

Определим скорость и ускорение точки B:

$$V_B = \omega_1 \cdot R_1 = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \frac{м}{с}$$
$$a_B^n = \omega_1^2 \cdot R_1 = 3^2 \cdot 0,6 = 5,4 \frac{м}{с^2}$$
$$a_B^\tau = \varepsilon_1 \cdot R_1 = 2,5 \cdot 0,6 = 1,5 \frac{м}{с^2} \qquad (16)$$
$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = \sqrt{5,4^2 + 1,5^2} = 5,6 \frac{м}{с^2}$$

С учетом допущений 1, 2 определим угловые скорость и ускорение колеса 3:

$$V_E = V_D$$
$$\omega_1 r_1 = \omega_3 \cdot r_3$$
$$\omega_3 = \frac{r_1}{r_3} \cdot \omega_1 = \frac{0,3}{0,2} \cdot 3 = 4,5 \frac{рад}{с}$$
$$a_E^\tau = a_D^\tau \qquad (17)$$
$$\varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_3 \cdot r_3$$
$$\varepsilon_3 = \frac{r_1}{r_3} \cdot \varepsilon_1 = \frac{0,3}{0,2} \cdot 2,5 = 3,75 \frac{рад}{с^2}$$

Точка принадлежит ступенчатому колесу 3 и лежит на большем радиусе:

$$V_A = \omega_3 \cdot R_3 = 4,5 \cdot 0,3 = 1,35 \frac{м}{с}$$
$$a_A^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 4,5^2 \cdot 0,3 = 6,075 \frac{м}{с^2}$$
$$a_A^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 3,75 \cdot 0,3 = 1,125 \frac{м}{с^2} \qquad (18)$$
$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^\tau\right)^2} = \sqrt{6,075^2 + 1,125^2} = 6,18 \frac{м}{с^2}$$

С учетом допущения 2 определим скорость и ускорение рейки 4, которая совершает поступательное движение:

$$V_4 = V_G = V_A = 1,35 \frac{м}{с}$$
$$a_4 = a_G^\tau = a_A^\tau = 1,125 \frac{м}{с^2} \qquad (19)$$

Ответ:

$$V_5 = 3\frac{м}{с}$$

$$V_A = 1,35\frac{м}{с}$$

$$V_B = 1,8\frac{м}{с}$$

$$V_C = 1,8\frac{м}{с}$$

$$V_4 = 1,35\frac{м}{с}$$

$$a_5 = 2,5\frac{м}{с^2}$$

$$a_A = 6,18\frac{м}{с^2}$$

$$a_B = 5,6\frac{м}{с^2}$$

$$a_C = 10,9\frac{м}{с^2}$$

$$a_4 = 1,125\frac{м}{с^2}$$

						Лист
						11
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Задача 5.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

5.3.1. Условие задачи

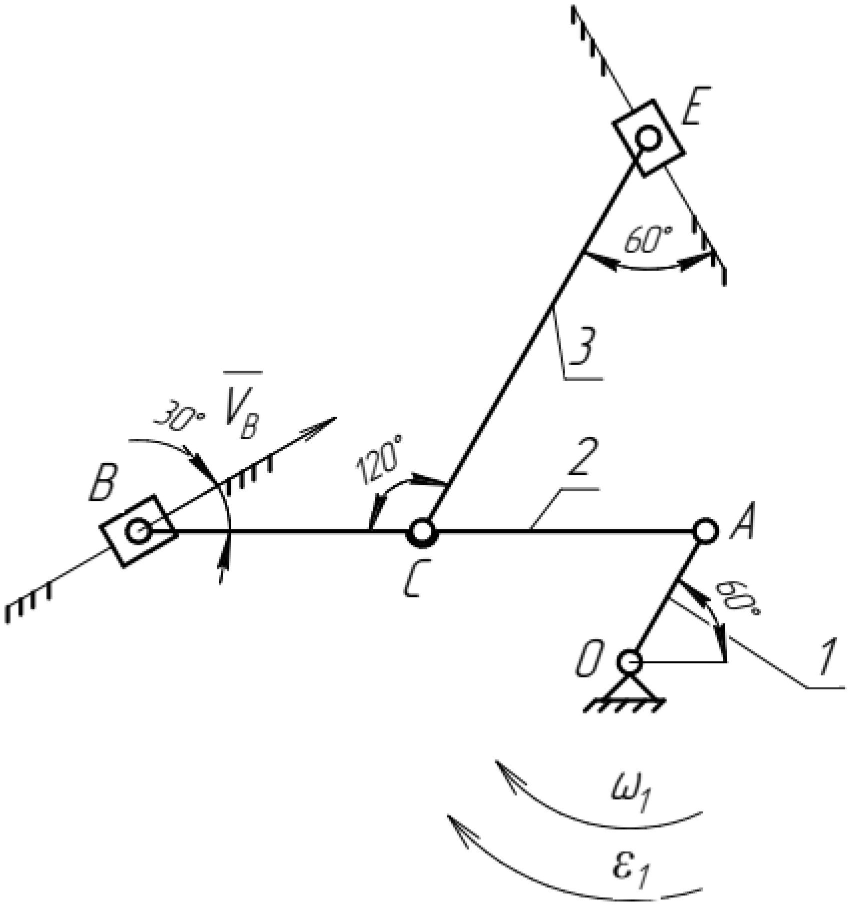

Рисунок 5.

Исходные данные:

$l_1 = 0,4м; l_2 = 1,5м; l_3 = 1,2м; l_4 = 0,6м.$

$\omega_1 = 2\frac{рад}{с}; \varepsilon_1 = 3\frac{рад}{с^2}.$

Определить:

$V_A, V_B, V_C, V_E - ?$

$\omega_2, \omega_3, \omega_4 - ?$

$a_A - ?$

5.3.2. Решение

Для решения задачи составим расчетную схему (Рисунок 6.). Для того, чтобы начертить расчетную схему выберем масштабный коэффициент:

$$\mu_l = \frac{l_1}{O_1A} = \frac{0,4}{20} = 0,02\frac{м}{мм} \qquad (20)$$

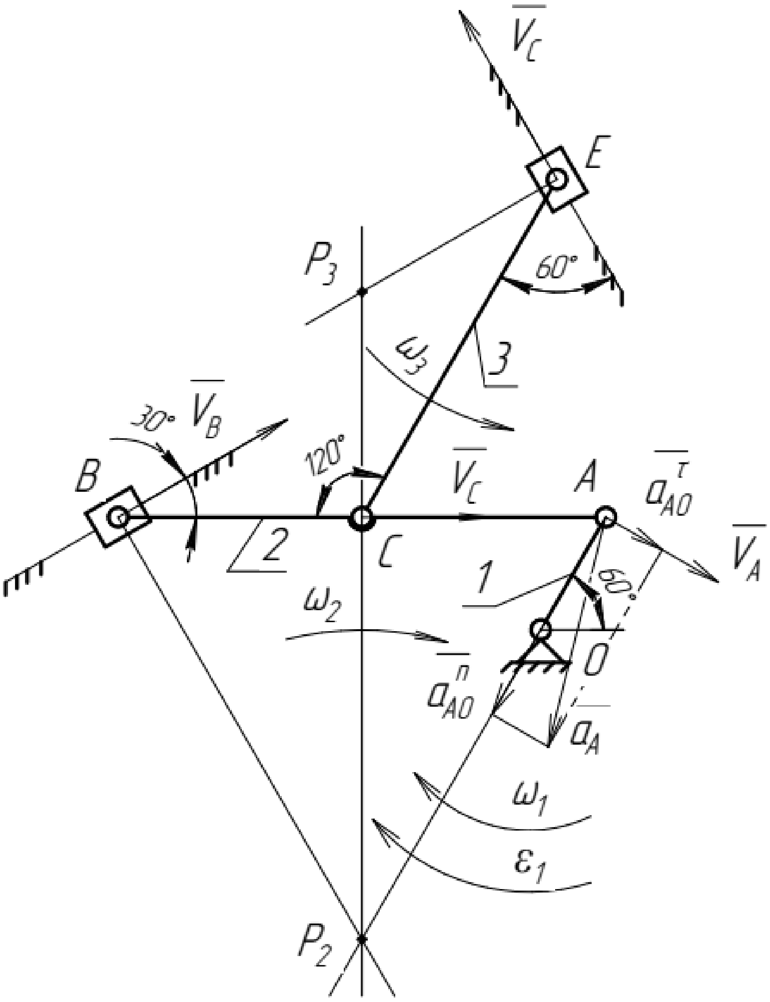

Рисунок 6.

Определим скорости точек и угловые скорости звеньев механизма методом МЦС.

Звено 1 совершает вращательное движение с заданной угловой скоростью. Тогда определим модуль вектора скорости точки А:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8\frac{м}{с} \qquad (21)$$

						Лист
						13
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Вектор скорости точки A направлен перпендикулярно звену 1 по направлению угловой скорости звена 1.

Звено 2 совершает плоскопараллельное движение. Точка B одновременно принадлежит позуну 3, который совершает поступательное движение и звену 2.

Направление вектора скорости точки B известно – вектор скорости точки B параллелен направлению движения ползуна 3. Тогда МЦС звена 2 будет лежать на пересечении перпендикулярных прямых векторам скоростей точек A и B соответственно.

Скорости точке пропорциональны их расстоянием до МЦС и связанны соотношением:

$$\frac{V_A}{AP_2} = \frac{V_B}{BP_2} = \omega_2 \qquad (22)$$

Так как ΔABP_2 равносторонний, то $AP_2 = BP_2 = \ell_2$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{0,8}{1.5} = 0,533\frac{рад}{с}$$
$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 0,533 \cdot 1,5 = 0,8\frac{м}{с} \qquad (23)$$

Направление угловой скорости ω_2 определим по направлению вектора $\overline{V_A}$ скорости точки A. Точка C так же принадлежит звену 2. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен перпендикулярно отрезку CP_2 в сторону, соответствующую направлению угловой скорости ω_2.

В ΔABP_2 отрезок CP_2 является высотой :

$$CP_2 = \ell_2 \cdot \sin 60^o. \qquad (24)$$

$$V_C = \omega_2 \cdot CP_2 = 0,533 \cdot 1.5 \cdot 0.866 = 0,692\frac{м}{с}. \qquad (25)$$

Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен перпендикулярно отрезку CP_2 в сторону, соответствующую направлению угловой скорости ω_2 звена 2.

Определим скорость точки B по теореме о проекции скоростей двух точек на одну прямую, проходящую через эти точки:

$$V_A \cdot \cos 30^\circ = V_B \cdot \cos 30^\circ$$
$$V_B = V_A = 0,8\,\frac{м}{с} \qquad (26)$$

Также, по теореме о проекции скоростей двух точек на одну прямую, проходящую через эти точки определим скорость точки С:

$$V_A \cdot \cos 30^\circ = V_C$$
$$V_C = 0,8 \cdot \cos 30^\circ = 0,692\,\frac{м}{с} \qquad (27)$$

Точка С одновременно принадлежит звену 2 и звену 3. Вектор скорости точки С полностью определен на плоскости. Точка Е принадлежит ползуну, который совершает поступательное движение, следовательно, направление вектора скорости точки Е известно. Тогда МЦС звена 3 будет лежать на пересечении прямых перпендикулярных векторам скоростей точек С и Е.

Скорости точек С и Е связанны соотношением:

$$\frac{V_C}{CP_3} = \frac{V_E}{EP_3} = \omega_3 \qquad (28)$$

Рассмотрим треугольник CP_3E.

По теореме синусов определим CP_3:

$$\frac{CP_3}{\sin 30^\circ} = \frac{CE}{\sin 120^\circ}$$
$$CP_3 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} \cdot CE = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} \cdot 1,2 = 0,692\,м \qquad (29)$$

Так как треугольник CP_3E равносторонний, то:

$$EP_3 = CP_3 = 0,692\,м \qquad (30)$$

$$\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} = \frac{0,692}{0,692} = 1,0\,\frac{рад}{с}$$
$$V_E = \omega_3 \cdot EP_3 = 1 \cdot 0,692 = 0,692\,\frac{м}{с} \qquad (31)$$

По теореме о проекции скоростей двух точек на одну прямую, проходящую через эти точки определим скорость точки Е:

$$V_E \cdot \cos 60^\circ = V_C \cdot \cos 60^\circ$$
$$V_E = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot V_C = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot 0,692 = 0,692\,\frac{м}{с} \qquad (33)$$

Определим ускорение точки А.

Точка А совершает вращательное движение с переменной угловой скоростью, тогда ускорение точки А будет состоять из касательно составляющей и нормальной составляющей.

$$\overline{a_A} = \overline{a_{O1}} + \overline{a_{AO1}^n} + \overline{a_{AO1}^\tau}$$

$$a_{O1} = 0\,\frac{м}{с^2}$$

$$a_{AO1}^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6\,\frac{м}{с^2} \qquad (34)$$

$$a_{AO1}^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 3 \cdot 0,4 = 1,2\,\frac{м}{с^2}$$

По алгебраическому правилу сложения векторов имеем:

$$a_A = \sqrt{\left(a_{AO1}^n\right)^2 + \left(a_{AO1}^\tau\right)^2} = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} = 2\,\frac{м}{с^2} \qquad (35)$$

Ответ:

$$V_A = 0,8\,\frac{м}{с}; V_B = 0,8\,\frac{м}{с}; V_C = 0,692\,\frac{м}{с}; V_E = 0,692\,\frac{м}{с}.$$

$$\omega_2 = 1,0\,\frac{рад}{с}; \omega_3 = 1,0\,\frac{рад}{с};$$

$$a_A = 2\,\frac{м}{с^2}.$$

Задача 4.1. Дифференциальное уравнение движения материальной точки.

4.1.1. Условие задачи

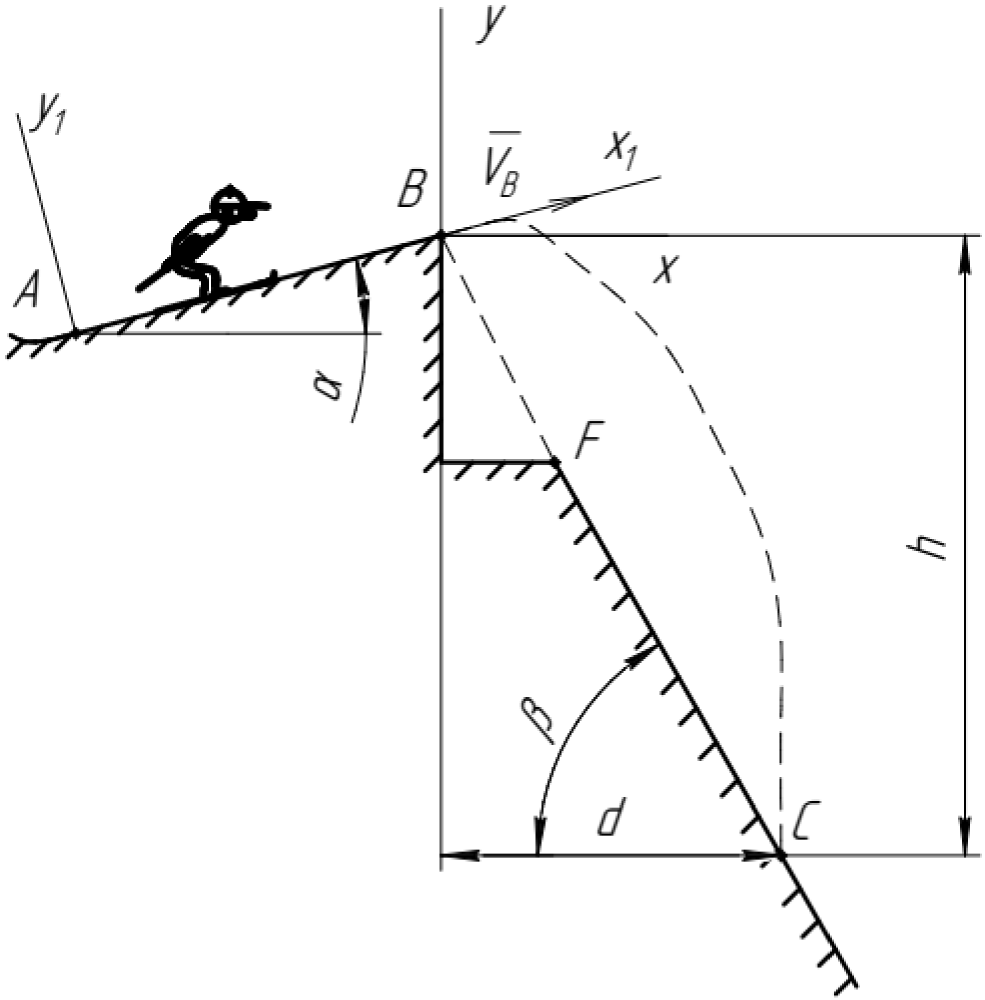

Рисунок 7.

Исходные данные:

$V_A = 21 \dfrac{м}{с};$

$V_B = 20 \dfrac{м}{с};$

$\beta = 60^\circ;$

$\tau = 0,3с.$

Определить:

$\alpha, d - ?$

4.1.2. Решение

Составим расчетную схему для решения задачи (рис. 8).

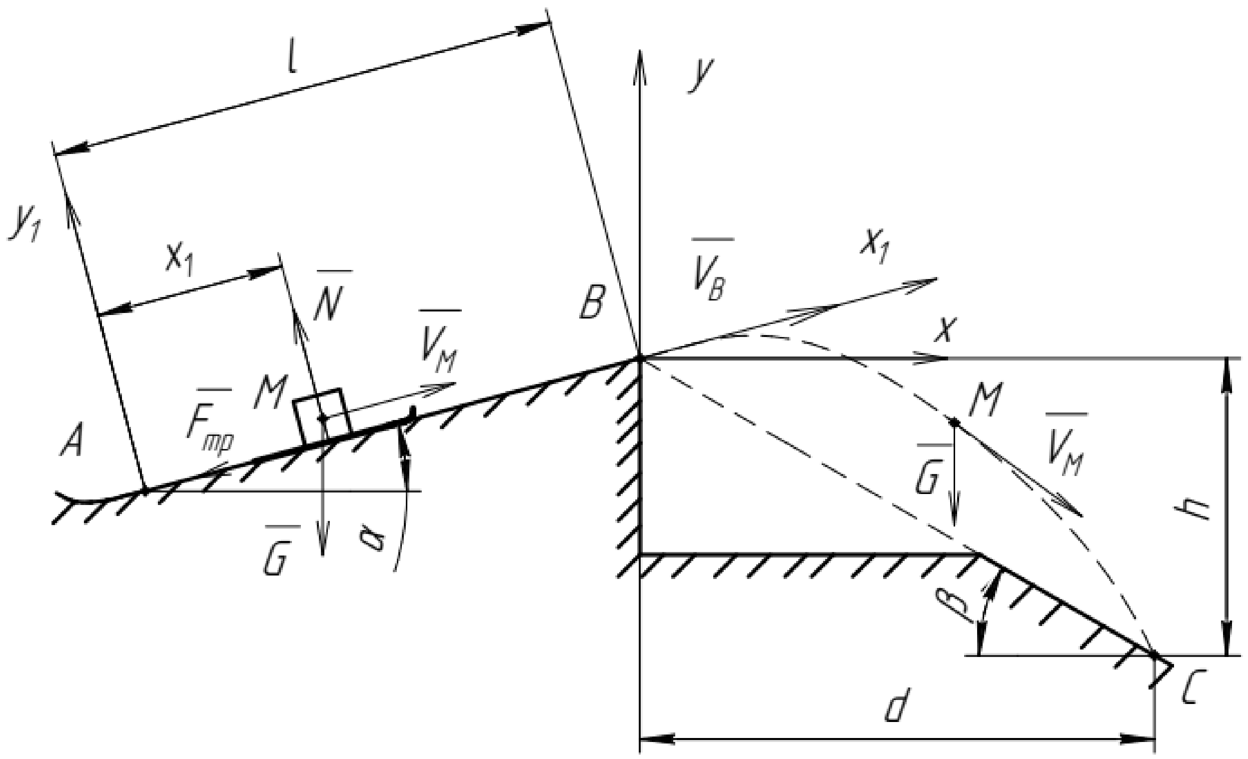

Рисунок 8.

Рассмотрим движение лыжника на участке АВ. Рассматриваем лыжника как материальную точку(так как нам не важна геометрия, то изобразим лыжника в виде камня). Приложим действующие на него силы и составим дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме:

$$m \cdot \frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F_{mp}} \qquad (36)$$

Проецируя уравнение (34) на оси координат x_1, y_1, получаем:

$$m x_1^{''} = -G \cdot \sin\alpha - F_{mp} \qquad (37)$$

$$m y_1^{''} = -G \cdot \cos\alpha + N \qquad (38)$$

Так как проекция ускорения на ось y_1=0, то N=mgcosα. Учитывая, что G=mg и $F_{тр}$=fN получаем следующие уравнения:

$$mx_1'' = -mg \cdot \sin\alpha - f \cdot mg \cdot \cos\alpha \tag{39}$$

$$\begin{gathered} my_1'' = -mg \cdot \cos\alpha + mg \cdot \cos\alpha \\ y_1'' = 0 \end{gathered} \tag{40}$$

В итоге получаем уравнение:

$$x_1'' = -g \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) \tag{41}$$

Дважды проинтегрируем уравнение (38):

$$x_1' = -gt \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) + C_1 \tag{42}$$

$$x_1 = -\frac{gt^2}{2} \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) + C_1 \cdot t + C_2 \tag{43}$$

Для определения произвольных постоянных уравнений (41), (42) воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{gathered} t = t_0 = 0c \\ x_{01} = 0 \\ x_{01}' = V_A \end{gathered} \tag{43}$$

$$C_1 = V_A \tag{44}$$

$$C_2 = 0 \tag{45}$$

$$x_1 = -\frac{gt^2}{2} \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) + V_A \cdot t \tag{46}$$

$$x_1' = -gt \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) + V_A \tag{47}$$

Из уравнения (47) определим коэффициент трения скольжения, исходя из того, что камень переместился в точку В за время τ:

$$V_B = -g\tau \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha) + V_A \tag{48}$$

$$f = \frac{V_B - V_A + g\tau \cdot \sin\alpha}{-g\tau \cdot \cos\alpha} \tag{49}$$

Определим угол α. Рассмотрим движение камня на участке ВС:

$$m \cdot \frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{G} \tag{50}$$

$$mx'' = 0 \tag{51}$$

$$my'' = -mg \tag{52}$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		Лист
						19

$$x'' = 0 \tag{53}$$

$$y'' = -g \tag{54}$$

Дважды проинтегрируем по времени уравнения (53), (54):

$$\begin{aligned} &x' = C_3 \\ &x = C_3 \cdot t + C_4 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} &y' = -gt + C_5 \\ &y = -\frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6 \end{aligned} \tag{56}$$

Определим постоянные интегрирования, исходя из граничных условий:

$$\begin{aligned} &t = t_0 = 0c \\ &x = x_0 = 0м \\ &x' = x_0' = V_B \cdot \cos\alpha \\ &C_3 = V_B \cdot \cos\alpha \\ &C_4 = 0 \\ &y' = y_0' = V_B \cdot \sin\alpha \\ &C_5 = V_B \cdot \sin\alpha \\ &C_6 = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Запишем уравнения (55), (56) с учетом (57):

$$\begin{aligned} &x' = V_B \cdot \cos\alpha \\ &x = V_B \cdot \cos\alpha \cdot t \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} &y' = -gt + V_B \cdot \sin\alpha \\ &y = -\frac{gt^2}{2} + V_B \cdot \sin\alpha \cdot t \end{aligned} \tag{59}$$

Тогда при t=0:

$$\begin{aligned} &V_B \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \sin\alpha \\ &\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \\ &tg\alpha = 1 \\ &\alpha = arctg(1) \\ &\alpha = 45^\circ \end{aligned} \tag{60}$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		Лист

Запишем граничные условия, когда камень упадет в точку С:

$$\begin{aligned} &V_{Cx} = V_B \cdot \cos\alpha \\ &d = V_B \cdot \cos\alpha \cdot T \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} &V_{Cy} = -gT + V_B \cdot \sin\alpha \\ &h = -\frac{gT^2}{2} + V_B \cdot \sin\alpha \cdot T \end{aligned} \tag{62}$$

Определим время Т, когда камень упадет в точку С. Из уравнения (62) для начала падения камня имеем:

$$\begin{aligned} &0 = -\frac{gT^2}{2} + V_B \cdot \sin\alpha \cdot T \\ &T \cdot \left(-\frac{gT}{2} + V_B \cdot \sin\alpha \right) = 0 \\ &T_1 = 0 \\ &T_2 = \frac{2 \cdot V_B \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \sin 45^\circ}{9,81} = 2,88c \end{aligned} \tag{63}$$

Определим d из уравнения (61):

$$d = V_B \cdot \cos\alpha \cdot T = 20 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2,88 = 40,7\text{м} \tag{64}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} &\alpha = 45^\circ; \\ &d = 40,7\text{м}. \end{aligned}$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Лист
					21

Задача 4.2. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

4.2.1. Условие задачи

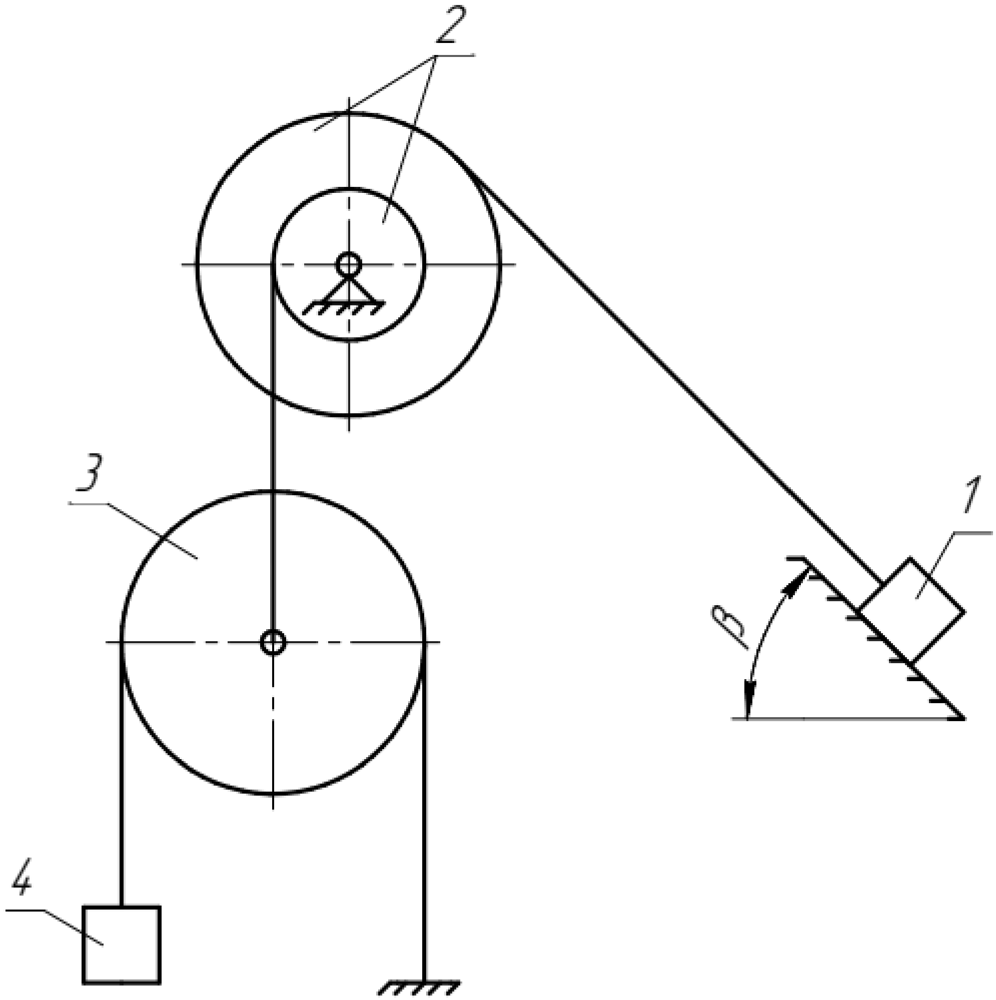

Рисунок 9.

Исходные данные:

$m_1 = 10кг; m_2 = 3кг; m_3 = 2кг; m_4 = 1кг;$

$R_2 = 0,4м; r_2 = 0,2м;$

$\beta = 45^\circ;$

$f = 0,1;$

$i_3 = 0,3м;$

$S_1 = 0,2м.$

Определить:

$\omega_2 - ?$

4.2.2. Решение

Для решения задачи составим расчетную схему (Рисунок 10.).

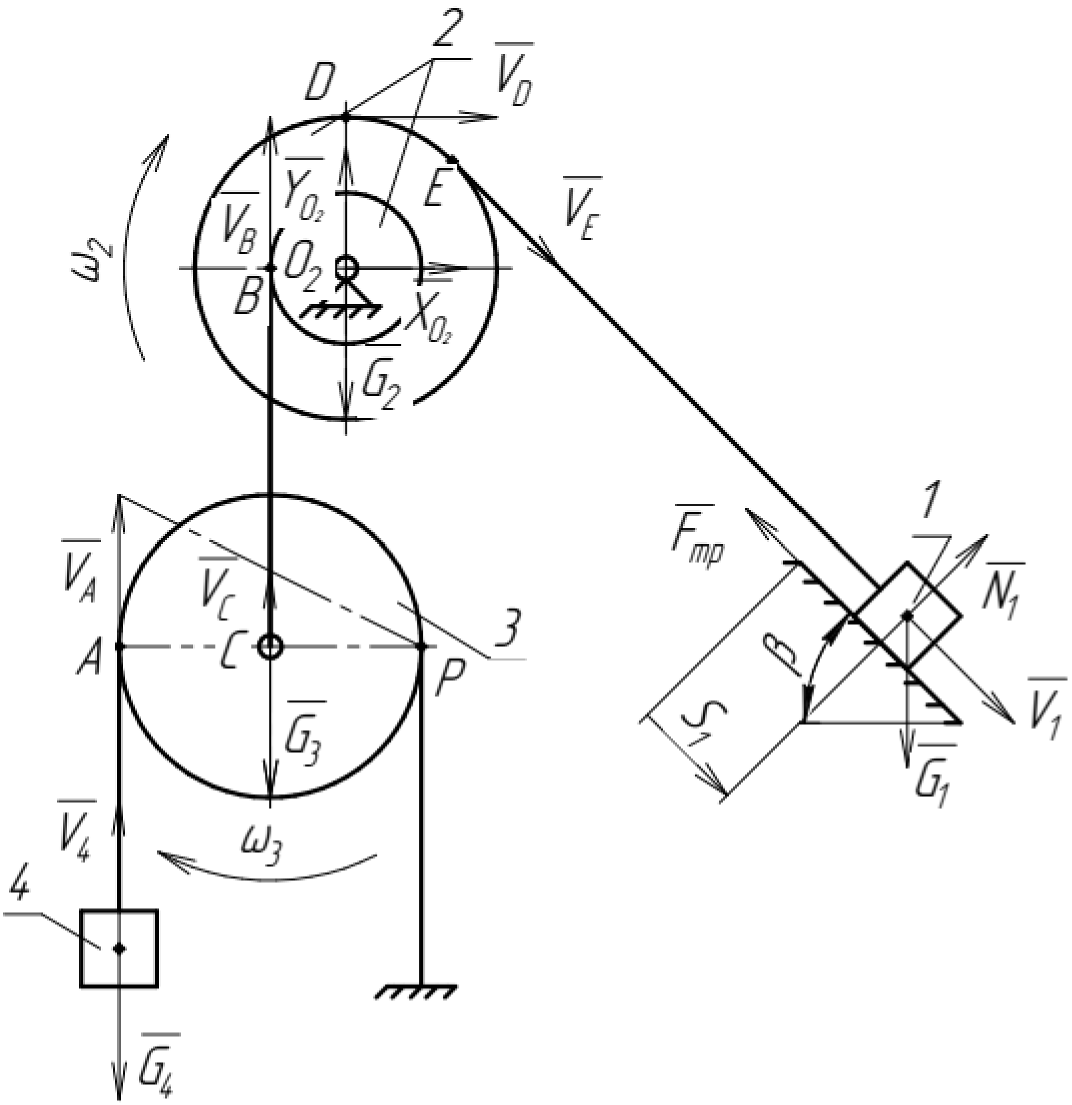

Рисунок 10.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нерастяжимыми нитями. Изобразим, действующие на систему внешние силы: активные $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \overline{G_3}, \overline{G_4}$, реакции связей $\overline{N_1}$, трения скольжения $\overline{F_{тр}}$.

Для определения искомых величин воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A^e_{F_k} + \sum A^i_{F_k} \quad , \qquad (65)$$

где T, T_0- кинетическая энергия механической системы в конечном и начальном положениях соответственно;

$\sum A_{F_k}^e$ - сумма работ внешних сил;

$\sum A_{F_k}^i$ - сумма работ внутренних сил.

Так как в задаче рассматриваются абсолютно твердые тела, то:

$$\sum A_{F_k}^i = 0 Дж \quad (66)$$

И, в условии задачи сказано, что в начальном положении механическая система покоилась, тогда:

$$T_0 = 0 Дж \quad (67)$$

Тогда с учетом (66), (67) уравнение (65) примет вид:

$$T = \sum A_{F_k}^e \quad (68)$$

Запишем выражения для определения кинетической энергии механической системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (69)$$

Груз 1 совершает поступательное движение, тогда:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_1^2 \quad (70)$$

Ступенчатое колесо 2 совершает вращательно движение вокруг неподвижной оси в точке O_2, тогда:

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot J_{O_2} \cdot \omega_2^2$$
$$J_{O_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \quad (71)$$
$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_2^2$$

Диск 3 совершает вращательное движение вокруг поступательно движущейся оси в точке C, тогда по тереме Кёнига для диска 3 имеем:

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot J_C \cdot \omega_3^2 \quad (72)$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	

$$J_C = m_3 \cdot i^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot i^2 \cdot \omega_3^2 \qquad (73)$$

Груз 4 совершает поступательное движение, тогда:

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot V_4^2 \qquad (74)$$

Так как в задаче необходимо вычислить угловую скорость тела 2, тогда все линейные и угловые скорости выразим через угловую скорость тела 2. При преобразовании воспользуемся допущением, что нити нерастяжимы и в точке контакта нитей и колес отсутствует проскальзывание. Тогда:

$$\begin{aligned}
&V_D = V_E = V_1 \\
&V_D = \omega_2 \cdot R_2 \\
&V_1 = \omega_2 \cdot R_2 \\
&V_B = V_C \\
&V_B = \omega_2 \cdot r_2 \\
&V_C = \omega_2 \cdot r_2 \\
&\omega_3 = \frac{V_C}{CP} = \frac{r_2}{R_3} \cdot \omega_2 \\
&\frac{V_C}{CP} = \frac{V_A}{AP}; \frac{V_C}{R_3} = \frac{V_A}{2 \cdot R_3} \\
&V_A = 2 \cdot V_C = 2 \cdot \omega_2 \cdot r_2 \\
&V_4 = V_A = 2 \cdot \omega_2 \cdot r_2
\end{aligned} \qquad (75)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot i^2 \cdot \omega_3^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot V_4^2 \qquad (76)$$

С учетом (75) уравнение (76) примет вид:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R_2^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot r_2^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot i_3^2 \cdot \frac{r_2^2}{0,25 \cdot i_3^2} + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 4 \cdot r_2^2 \cdot \omega_2^2 \qquad (77)$$

Подставим численные значения и преобразуем выражение (77):

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(10 \cdot 0,4^2 + 0,5 \cdot 3 \cdot 0,4^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 2 \cdot \frac{0,2^2}{0,25} + 1 \cdot 4 \cdot 0,2^2 \right) \cdot \omega_2^2 \qquad (78)$$

$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \omega_2^2$, где а- приведенный коэффициент инерции механической системы.

$$a = 2,4 кг \cdot м^2 \qquad (79)$$

Вычислим суммарную работу внешних сил:

$$\sum A_{F_k}^e = -F_{тр} \cdot S_1 + G_1 \cdot S_1 \cdot \cos\beta - G_3 \cdot S_C - G_4 \cdot S_4$$
$$F_{тр} = f \cdot N = f \cdot G_1 \cdot \sin\beta$$
$$S_C = S_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} = 0.5S_1$$
$$S_4 = S_1 \cdot \frac{2 \cdot r_2}{R_2} = S_1 \qquad (80)$$
$$\sum A_{F_k}^e = -f \cdot m_1 \cdot g\cos 45^\circ \cdot S_1 + m_1 \cdot g \cdot \cos 45^\circ \cdot S_1 - m_3 \cdot g \cdot 0.5 \cdot S_1 - m_4 \cdot g \cdot S_4$$
$$\sum A_{F_k}^e = -0,1 \cdot 10 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,2 + 10 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 0,2 - 1 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = 8,56\,Дж$$

Вычислим угловую скорость звена 2:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot \omega_2^2 = 8,56$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{8,56 \cdot 2}{2,4}} = 2,67\,\frac{рад}{c} \qquad (81)$$

Ответ:

$$\omega_2 = 2,67\,\frac{рад}{c}$$

						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Задача 4.3. Принцип Даламбера

4.3.1. Условие задачи

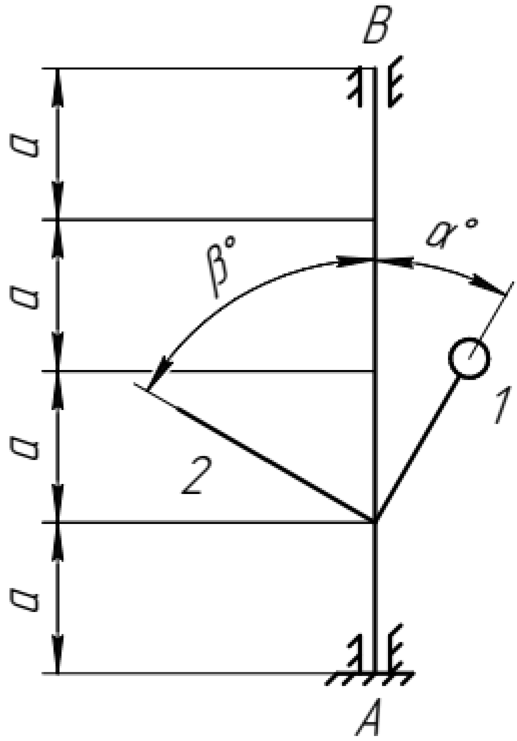

Рисунок 11.

Исходные данные:

$\omega_1 = 5\dfrac{рад}{с};$

$l_1 = 0,5м; l_2 = 0,6м; a = 0,5м;$

$m_1 = 5кг; m_2 = 4кг;$

$\alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ.$

Определить:

$R_A, R_B - ?$

4.3.2. Решение

Для решения задачи составим расчетную схему (Рисунок 12.)

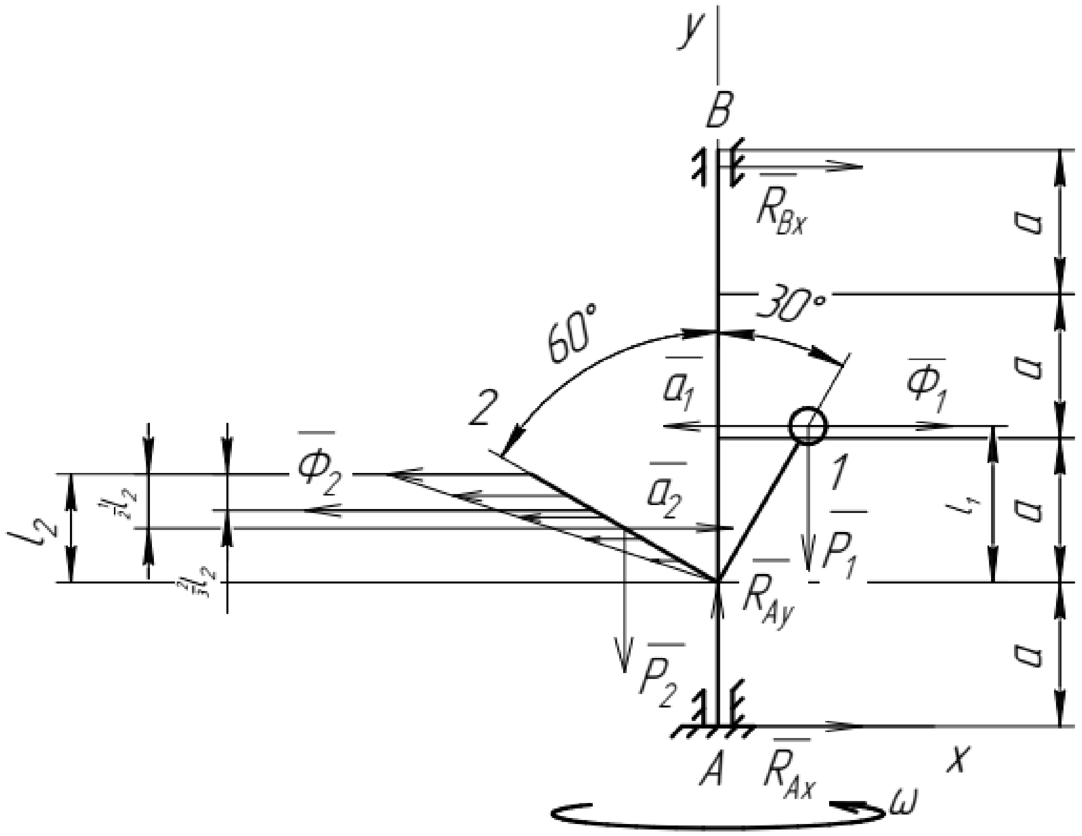

Рисунок 12.

Для определения искомых реакций внешних связей рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координаты xAy так, чтобы стержни лежали в одной плоскости.

На систему действуют активные силы P_1, P_2 и реакции внешних связей R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}. В соответствии с принципом Даламбера присоединим к этим сила силу инерции точечного груза 1 и однородного стержня 2.

						Лист
						28
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Определим модуль главного вектора сил инерции однородного стержня 2:

$$\overline{\Phi_2} = -m_2 \cdot \overline{a_2}$$
$$\Phi_2 = m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot 5^2 \cdot \frac{0,6}{2} \cdot \sin 60^\circ = 26H$$
$$\overline{\Phi_1} = -m_1 \cdot \overline{a_1} \tag{82}$$
$$\Phi_1 = m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot 5^2 \cdot \frac{0,5}{2} \cdot \sin 30^\circ = 15,625H$$
$$P_1 = m_1 \cdot g = 5 \cdot 9,81 = 49,05H$$
$$P_2 = m_2 \cdot g = 4 \cdot 9,81 = 39,24H$$

Согласно принципу Даламбера составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad R_{Ax} - \Phi_2 + \Phi_1 + R_{Bx} = 0 \tag{83}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad R_{Ay} - P_2 - P_1 = 0 \tag{84}$$

$$\sum M_F(\overline{F_k}) = 0,$$
$$-R_{Bx} \cdot 4a + \Phi_2 \cdot (a + \frac{2}{3} l_2 \cdot \cos 60^\circ) - \Phi_1 \cdot (a + l_1 \cdot \sin 30^\circ) + P_2 \cdot \frac{l_2}{2} \sin 60^\circ - P_1 \cdot l_1 \cos 30^\circ \tag{85}$$

Из уравнения (85) определим R_{Bx}:

$$-R_{Bx} \cdot 4a + \Phi_2 \cdot (a + \frac{2}{3} l_2 \cdot \cos 60^\circ) - \Phi_1 \cdot (a + l_1 \cdot \sin 30^\circ) + P_2 \cdot \frac{l_2}{2} \sin 60^\circ - P_1 \cdot l_1 \cos 30^\circ$$
$$R_{Bx} = \frac{26 \cdot (0,5 + \frac{2}{3} \cdot 0,6 \cdot \frac{1}{2}) - 15,625 \cdot (0,5 + 0,5 \cdot \frac{1}{2}) + 39,24 \cdot \frac{0,6}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 49,05 \cdot 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \cdot 0,5} \tag{86}$$
$$R_{Bx} = -4,41H$$

Из уравнения (83):

$$R_{Ax} - \Phi_2 + \Phi_1 + R_{Bx} = 0 \tag{87}$$
$$R_{Ax} = -\left(\Phi_1 - \Phi_2 + R_{Bx}\right) = -(15,625 - 26 - 4,41) = 14,9H$$

Из уравнения (84) имеем:

$$R_{Ay} = P_2 + P_1 = 49,05 + 39,24 = 88,29H \tag{88}$$

Определим полные реакции:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{14,9^2 + 88,29^2} = 89,5H \tag{89}$$
$$R_B = R_{Bx} = -4,41H$$

Ответ: $R_A = 89,5H; R_B = -4,41H$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	