13.20. Не выполняя построения графика функции $y = (x-1)^{-2} - 2$, укажите:

(а) область определения и область значений функции:

Область определения:

Единственное ограничение области определения: знаменатель не равен нулю, то есть $x \neq 1$. Поэтому $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Другой вариант записи: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$E(y) = (-2, +\infty)$. Ответ можно получить, например, через серию преобразований неравенств:

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < x - 1 < +\infty$$

$$0 \leq (x-1)^2 < +\infty$$

$$0 < (x-1)^{-2} < +\infty$$

$$-2 < (x-1)^{-2} - 2 < +\infty$$

(б) промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции:

Монотонность:

Вариант 1, через производную (если было):

$y' = -2(x-1)^{-3}$, единственная точка, подозрительная на экстремум: $x = 1$, кратности 3. $y' > 0$ при $x < 1$ и $y' < 0$ при $x > 1$, поэтому график функции монотонно возрастает на интервале $(-\infty, 1)$ и монотонно убывает на интервале $(1, +\infty)$.

Вариант 2, через композицию функций:

$x - 1$ — монотонно возрастает на $\mathbb{R}$;

$(x-1)^2$ — убывает на $(-\infty, 1)$, возрастает на $(1, +\infty)$;

$(x-1)^{-2}$ — возрастает на $(-\infty, 1)$, убывает на $(1, +\infty)$;

$y = (x-1)^{-2} - 2$ — возрастает на $(-\infty, 1)$, убывает на $(1, +\infty)$.

Знакопостоянство: $y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^{-2} - 2 = 0$

$$1 - 2(x-1)^2 = 0$$

$$1 - 2x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

При этом, $x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} < 1 < x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, $y < 0$ на интервалах $(\infty, \frac{2-2\sqrt{2}}{2})$ и $(\frac{2+2\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, и $y > 0$ на интервалах $(\frac{2-2\sqrt{2}}{2}, 1)$ и $(1, \frac{2+2\sqrt{2}}{2})$.

(в) уранения асимптот:

Вертикальная асимптота: $x = 1$, как точка разрыва ($\lim\limits_{x \to +1} y = +\infty = \lim\limits_{x \to -1} y$).

Горизонтальная асимптота: $y = 2$ ($\lim\limits_{x \to \infty} y = 2$).

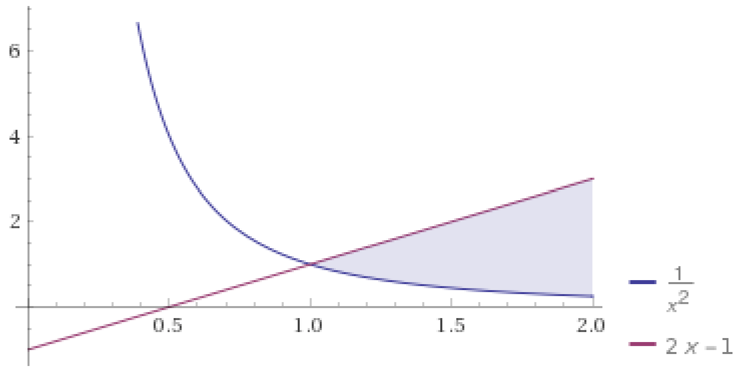
Наклонные асимптоты (если были): Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота. Тогда $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x-1)^{-2} - 2}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - 2(x-1)^2}{x(x-1)^2} = 0$, значит, наклонных асимптот нет.

(Если вообще пределов не было, достаточно просто выписать вертикальную и горизонтальную асимптоту и сказать, что они получились из ОО и ОДЗ соответственно.)

(г) уравнение оси симметрии графика функции:

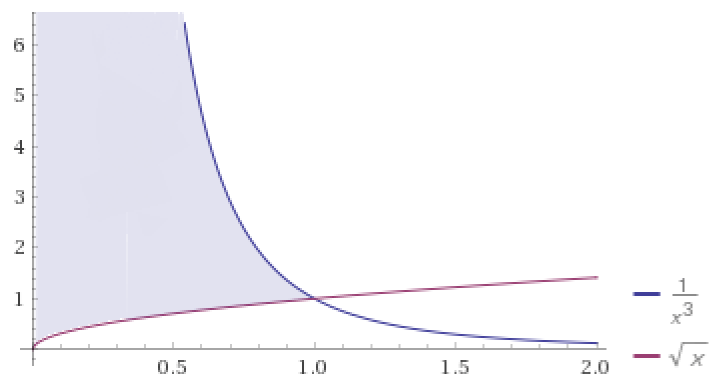
Поскольку функция $y = (x-1)^{-2} - 2$ — это смещённый график функции $y = \frac{1}{x^2}$, уравнение оси симметрии графика функции — это его вертикальная асимптота, то есть, $x = 1$. Действительно, для всякого x $(x-1)^{-2} - 2 = (2-x-1)^{-2} - 2$ (проверка по определению оси симметрии, если было).

13.22. (в, г)



(в) Точка пересечения: $\frac{1}{x^2} = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

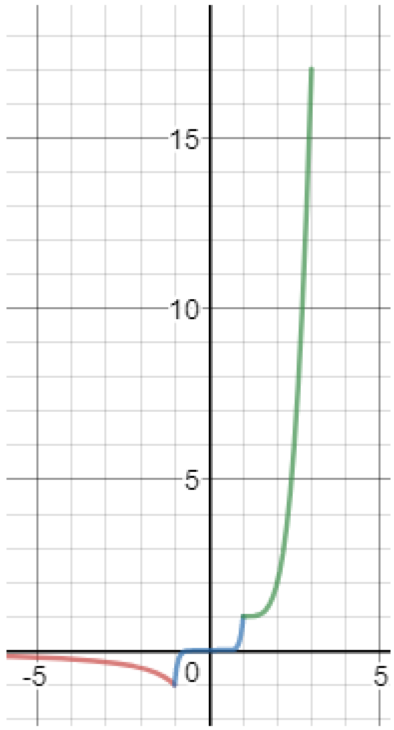
Ответ: $(1, +\infty)$ (область определения функций не влияет на ответ)



(г) Точка пересечения: $\frac{1}{x^3} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$.

Ответ: $(0, 1)$ (из-за того, что область определения двух функций $(0, +\infty)$)

12.29.



Построение первой части $y = \frac{1}{x}$ — по определению гиперболы (просто перерисовать, никаких вычислений). Единственное, нужно вычислить ординату точки на границе интервала: $y = \frac{1}{x}, x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1$

Построение второй части $y = x^{11}$ — Область определения, область допустимых значений — все числа. Исследование монотонности зависит от того, что из перечисленного уже было.

Если производной не было:

$y = x^{11}$ — полином нечётной степени, значит, монотонно возрастает;

нули функции: $y = 0$ при $x = 0$;

ординаты граничных точек: $y = (\pm 1)^{11} = \pm 1$.

Если производная была:

$y' = 11x^{10} \geq 0$ — функция монотонно возрастает, экстремумов нет, т.к. единственная точка, подозрительная на экстремум — это $x = 0$ чётной кратности 10; нули и ординаты граничных точек вычисляются также, как выше.

Если были точки перегиба:

$y' = 11x^{10} \geq 0$ — функция монотонно возрастает, экстремумов нет (см. выше);

$y'' = 11 \cdot 10x^9$, $y'' = 0$ при $x = 0$ — точка перегиба, причём $y'' < 0$ при $-1 \leq x < 0$ и $y'' > 0$ при $0 < x \leq 1$. Значит, на интервале $(-1, 0)$ график функции вогнут вверх, а на $(0, 1)$ вогнут вниз;

нули функции и ординаты граничных точек вычисляются как выше.

Построение третьей части $(x-1)^4 + 1$ —

Область определения — все числа.

Область допустимых значений: $(x-1)^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 + 1 \geq 1$, то есть, $[1, +\infty)$.

Исследование монотонности с производной (если была):

$y' = 4(x-1)^3 \geq 0$ на рассматриваемом интервале от 1 до 3, поэтому график функции на $(1, 3)$ монотонно возрастает.

Исследование монотонности без производной (если не было):

$(x-1)^4$ — полином чётной степени, возрастает при $x \geq 1$ и убывает при $x \leq 1$; значит, $y=(x-1)^4+1$ монотонно возрастает на $(1,3)$.

Точки перегиба (если были):

$y''=4\cdot 3(x-1)^2>0$ на интервале $(1,3)$, значит, график функции вогнут вниз.

Нулей функции нет из-за ОДЗ.

Ординаты граничных точек: $y=(1-1)^4+1=1$, $y=(3-1)^4+1=17$.