Задача 2. Найти частное решение удовл. нач. условиям (задача Коши)

$$xy'' = y' - 5,\quad y(1) = 0,\ y'(1) = 0$$

Т.к. $\left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{y''x - y'}{x^2}$, тогда

$\left(\frac{y'}{x}\right)' = -\frac{5}{x^2}$, Пусть $\frac{y'}{x} = t(x)$, тогда

$$t'(x) = -\frac{5}{x^2} \xrightarrow{\text{интегрирование}} t(x) = -5\left(-\frac{1}{x}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{5}{x} + C_1 = \frac{y'}{x}$$

$$y' = 5 + C_1 x \Rightarrow y(x) = 5x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y(1) = 5 + \frac{C_1}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{5}{2}$$

$$y'(1) = 5 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -5$$

$$y(x) = 5x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}(2x - x^2 - 1) =$$

$$= -\frac{5}{2}(x-1)^2$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{5}{2}(x-1)^2}$$

переписываем →
~~решение~~, но уже
уравнение неоднородно

Задача 3. Найти общее решение неоднородного уравнения, если известно решение однородного уравнения

$$x^2y'' + xy' - y = 2\ln|x|$$

Решим однородное уравнение:

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

Пусть $y(x) = x^p$, тогда

$$y'(x) = px^{(p-1)},\quad y'' = p(p-1)x^{p-2}$$

$$p(p-1)x^p + px^p - x^p = 0$$

$$p(p-1) + p - 1 = 0$$

$$p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm 1$$

частное данн. по усл. реш-е

Т.о. $y(x) = \frac{C_1(x)}{x} + C_2(x)x$, тогда

$$y'(x) = \frac{C_1'(x)}{x} - \frac{C_1(x)}{x^2} + C_2'(x)x + C_2(x)$$

$$\frac{C_1'(x)}{x} + C_2'(x)x = 0 \quad (1)$$

$$y''(x) = -\frac{C_1'(x)}{x^2} + \frac{2C_1(x)}{x^3} + C_2'(x)$$

$$x^2\left(-\frac{C_1'(x)}{x^2} + \frac{2C_1(x)}{x^3} + C_2'(x)\right) +$$

$$+ x\left(-\frac{C_1(x)}{x^2} + C_2(x)\right) - \left(\frac{C_1(x)}{x} + C_2(x)x\right) =$$

(2)

$$-C_1'(x) + \cancel{2\frac{C_1(x)}{x}} + C_2'(x)x^2 - \cancel{\frac{2C_1(x)}{x}} = 2\ln|x|$$

$$\begin{cases} -C_1'(x) + x^2 C_2'(x) = 2\ln|x| \\ \frac{C_1'(x)}{x} + C_2'(x)x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_2'(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} \\ C_1'(x) = -\ln|x| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\int \ln|x|\,dx + C_1^0 \\ C_2(x) = \int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx + C_2^0 \end{cases}$$

интегрир по частям

1) $\int \ln|x|\,dx = \ln|x|\,x - \int dx = x(\ln|x|-1)$

интегрир по частям

2) $\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = \frac{\cancel{x}(\ln|x|-1)}{x^2} + \int \frac{2}{x^{3}}\cancel{x}(\ln|x|-1)\,dx =$

$$= \frac{\ln|x|-1}{x} + 2\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = \frac{\ln|x|+1}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = -\frac{\ln|x|+1}{x}$$

в случае 1) $u = \ln|x|$, $dv = dx$

2) $u = \frac{1}{x^2}$, $dv = \ln|x|\,dx$

общая формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(-x(\ln|x|-1) + C_1^0\right) + x\left(-\frac{\ln|x|+1}{x} + C_2^0\right) =$$

$$= -(\ln|x|-1) + \frac{C_1^0}{x} - (\ln|x|+1) + C_2^0(x) =$$

$$= \frac{C_1^0}{x} + C_2^0 x - 2\ln|x|.$$

$$\boxed{y(x) = \frac{C_1^0}{x} + C_2^0 x - 2\ln|x|}$$