2. Контрольная работа № 2 «Анализ переходных процессов в линейных цепях».

Дано:

C = 10 мкФ;
L = 0,1 Гн;
R = 100 Ом.
$e(t) = 100\sqrt{2}\cos(1000t)$ В,
$j(t) = 2\sqrt{2}\cos(1000t)$ А;
E=100 В,
J=2 А.

Найти: $U_{C8}(t)$.

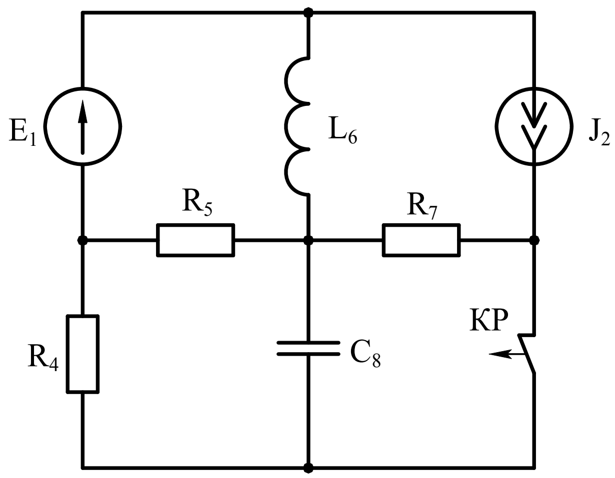


Рис. 1
Расчетная схема для варианта 18

Решение

1) Рассчитаем переходной процесс для $U_{C8}(t)$ классическим методом, если $e(t)=100\sqrt{2}\cos(1000t)\,B$, $j(t)=2\sqrt{2}\cos(1000t)\,A$ $(\omega = 1000\ рад/с)$.

Решение задачи следует искать в виде:

$$U_{C8}(t) = U_{пр}(t) + U_{св}(t), \tag{1}$$

где $U_{пр}(t)$ – принужденная составляющая, определяется путем расчета стационарного режима работы схемы после коммутации;

$U_{св}(t)$ – свободная составляющая, соответствует режиму, когда внешние (принуждающие) силы (источники энергии) на цепь непосредственно не воздействуют.

Определим принужденную составляющую $U_{пр}(t)$. Схема после коммутации (размыкания ключа) имеет вид:

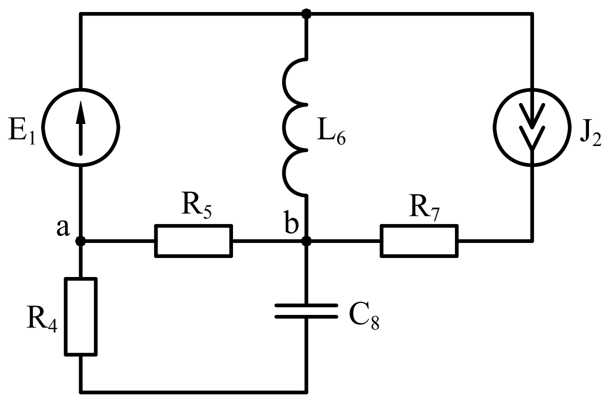


Рис. 2

Сопротивление участка **ab**:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_5\cdot(R_4 - j1/\omega C_8)}{R_4 + R_5 - j1/\omega C_8} = \frac{100\cdot(100 - j100)}{100+100-j100} = 60 - j20\ Ом.$$

Схема принимает вид:

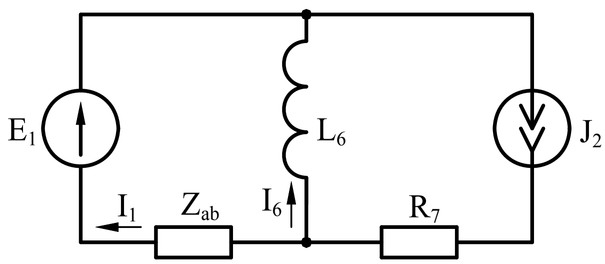


Рис. 3

По 1-му закону Кирхгофа

$\underline{I}_6 = \underline{J}_2 - \underline{I}_1$.

По 2-му закону Кирхгофа

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} - \underline{I}_6 \cdot j\omega L_6 = \underline{E}_1,$$

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} - \left(\underline{J}_2 - \underline{I}_1\right) \cdot j\omega L_6 = \underline{E}_1,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 + \underline{J}_2 \cdot j\omega L_6}{\underline{Z}_{ab} + j\omega L_6}.$$

Напряжение на участке **ab** (рис. 2):

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \cdot Z_{ab} = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \left(\underline{E}_1 + \underline{J}_2 \cdot j\omega L_6\right)}{\underline{Z}_{ab} + j\omega L_6}.$$

Напряжение на конденсаторе после размыкания ключа:

$$\underline{U}_{C8} = -j\left(1/\omega C_8\right) \cdot \underline{I}_8 = -j\left(1/\omega C_8\right) \cdot \frac{\underline{U}_{ab}}{R_4 - j1/\omega C_8} = \frac{-j1/\omega C_8}{R_4 - j1/\omega C_8} \cdot \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \left(\underline{E}_1 + \underline{J}_2 \cdot j\omega L_6\right)}{\underline{Z}_{ab} + j\omega L_6},$$

$$\underline{U}_{C8} = \frac{-j100}{100 - j100} \cdot \frac{\left(60 - j20\right) \cdot \left(j100\sqrt{2} + j2\sqrt{2} \cdot j100\right)}{60 - j20 + j100} = \left(80 + j60\right)\sqrt{2} = 100\sqrt{2} e^{j36.9^\circ} B.$$

Итак, $\underline{U}_{пр} = 100\sqrt{2} e^{j36.9^\circ} B$ или $U_{пр}\left(t\right) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t + 36.9^\circ\right) B$. (2)

Для составления характеристического уравнения запишем входное сопротивление цепи на переменном токе (для режима после коммутации).

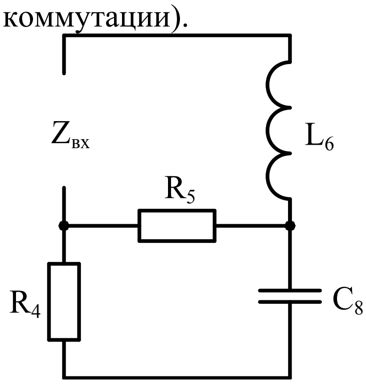


Рис. 4

$$\underline{Z}_{вх}\left(j\omega\right) = j\omega L_6 + \frac{R_5 \cdot \left(R_4 + 1/j\omega C_8\right)}{R_5 + R_4 + 1/j\omega C_8}.$$

Заменив $j\omega$ на p и приравняв полученное выражение к нулю, запишем

$$\underline{Z}_{вх}\left(p\right) = pL_6 + \frac{R_5 \cdot \left(R_4 + 1/pC_8\right)}{R_5 + R_4 + 1/pC_8} = 0,$$

Или

$$pL_6\left(R_5 + R_4 + 1/pC_8\right) + R_5 \cdot \left(R_4 + 1/pC_8\right) = 0;$$

$$\left(R_5 + R_4\right) L_6 p^2 + \left(L_6/C_8 + R_5 \cdot R_4\right) p + R_5/C_8 = 0.$$

Подставляя численные значения, получим

$$\left(100 + 100\right) \cdot 0.1 p^2 + \left(0.1/10^{-5} + 100 \cdot 100\right) p + 100/10^{-5} = 0;,$$

$$20 p^2 + 20000 p + 10^7 = 0;$$

$$p^2 + 1000 p + 5 \cdot 10^5 = 0;$$

$$p = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10^5}}{2} = -500 \pm j500.$$

Т.е. корни характеристического уравнения получись комплексно-сопряженными. Тогда свободная составляющая $U_{св}\left(t\right)$ запишется в виде:

$$U_{св}\left(t\right) = A \cdot e^{-500t} \sin\left(500t + \varphi\right). \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$U_{C8}(t)=100\sqrt{2}\cdot\sin(1000t+36.9°)+A\cdot e^{-500t}\sin(500t+\varphi). \qquad (4)$$

Постоянные интегрирования A и φ можно найти на основании основных и неосновных начальных условий. Основные начальные условия определяются законами коммутации по схеме докоммутационного состояния цепи. Определим напряжение $U_{C8}(0-)$ на конденсаторе до размыкания ключа. Для этого воспользуемся методом контурных токов. Схема до коммутации имеет вид:

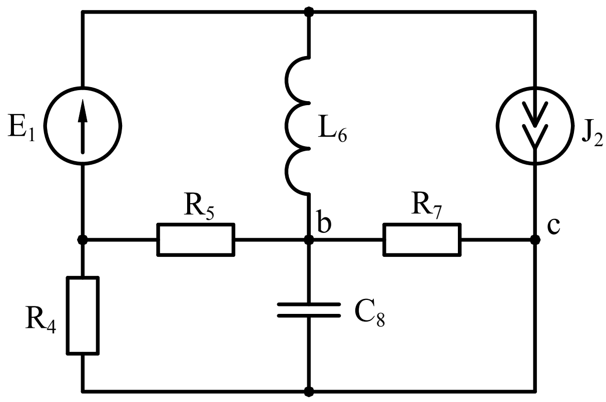


Рис. 5

C_8 и R_7 соединены параллельно, тогда:

$$\underline{Z}_{bc}=\frac{R_7\cdot\left(-j\left(1/\omega C_8\right)\right)}{R_7-j\left(1/\omega C_8\right)}=\frac{100\cdot(-j100)}{100-j100}=50-j50\,Ом.$$

Схема принимает вид:

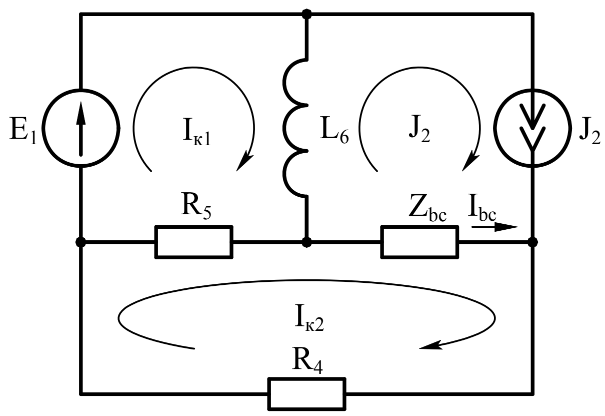


Рис. 6

Воспользуемся методом контурных токов. Примем направления контурных токов как показано на рис. 6. При этом учитываем, что контурный ток в контуре с источником тока равен току источника тока.

$$\begin{cases}I_{к1}\left(R_5+j\omega L_6\right)-I_{к2}R_5-J_2\cdot j\omega L_6-=E_1;\\-I_{к1}R_5+I_{к2}\left(R_4+R_5+Z_{ab}\right)-J_2Z_{ab}=0.\end{cases}$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\begin{cases}(100+j100)I_{к1}-100I_{к2}-j2\sqrt{2}\cdot j100=j100\sqrt{2};\\-100I_{к1}+(100+100+50-j50)I_{к2}-j2\sqrt{2}\cdot(50-j50)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(100+j100)I_{к1}-100I_{к2}=100\sqrt{2}(-2+j1);\\-100I_{к1}+(250-j50)I_{к2}=100\sqrt{2}\cdot(1+j1);\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1+j1)I_{к1}-I_{к2}=(-2+j1)\sqrt{2};\\-2I_{к1}+(5-j1)I_{к2}=2\sqrt{2}\cdot(1+j1);\end{cases}$$

$$\begin{cases}I_{к1}=\dfrac{I_{к2}}{1+j1}+\dfrac{(-2+j1)\sqrt{2}}{1+j1}=(0.5-j0.5)I_{к2}+(-0.5+j1.5)\sqrt{2};\\-2\left((0.5-j0.5)I_{к2}+(-0.5+j1.5)\sqrt{2}\right)+(5-j1)I_{к2}=2\sqrt{2}\cdot(1+j1);\end{cases}$$

$4I_{к2} = (1+j5)\sqrt{2};$

$I_{к2} = (0.25+j1.25)\sqrt{2};$

$I_{к1} = (0.5-j0.5)(0.25+j1.25)\sqrt{2} + (-0.5+j1.5)\sqrt{2} = (0.25+j2)\sqrt{2}.$

Ток на участке **bc**:

$I_{bc} = I_{к2} - J_2 = (0.25+j1.25)\sqrt{2} - j2\sqrt{2} = (0.25-j0.75)\sqrt{2}\ A.$

Итак, напряжение на конденсаторе (оно равно напряжению на сопротивлении $\underline{Z}_{bc}$) до размыкания ключа:

$U_{C8} = I_{bc}Z_{bc} = (0.25-j0.75)\sqrt{2}\cdot(50-j50) = (-1-j2)25\sqrt{2} = 25\sqrt{10}e^{-j116.6^\circ}\ B;$

$U_{C8}(t) = 25\sqrt{10}\cdot\sin(1000t-116.6^\circ)\,B.$

Ток через катушку:

$I_6 = I_{к1} - I_{к2} = (0.25+j2)\sqrt{2} - (0.25+j1.25)\sqrt{2} = j0.75\cdot\sqrt{2} = 0.75\cdot\sqrt{2}e^{j90^\circ}\ A;$

$I_6(t) = 0.75\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(1000t+90^\circ)\,A.$

Согласно закону коммутации, ток в катушке и напряжение на конденсаторе при коммутации не могут измениться скачком, значит

$$U_{C8}(0+) = U_{C8}(0-) = 25\sqrt{10}\cdot\sin(-116.6^\circ) = -50\sqrt{2}\ B, \quad (5)$$

$I_6(0+) = I_6(0-) = 0.75\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(90^\circ) = 0.75\cdot\sqrt{2}\ A.$

Из (4) при $t=0$ и (5), получаем:

$-50\sqrt{2} = 60\sqrt{2} + A\cdot\sin(\varphi);$

$$A\sin(\varphi) = -110\sqrt{2}. \quad (6)$$

Второе уравнение получим из анализа неосновного начального условия, которое определяется исследованием энергетического состояния цепи для момента времени $t = 0+$. К этому условию относят численное значение тока через конденсатор в первый момент после коммутации, которое претерпевает скачок в момент коммутации и связано с переменной состояния известным дифференциальным соотношением:

$$I_{C8}(t) = C_8\cdot\frac{dU_{C8}(t)}{dt}. \quad (7)$$

Из (4) и (7), взяв производную, имеем:

$I_{C8}(t) = 10\cdot10^{-6}\left(100\sqrt{2}\cdot1000\cdot\cos(1000t+36.9^\circ) + 500A\cdot e^{-500t}\left(-\sin(500t+\varphi)+\cos(500t+\varphi)\right)\right).$

При $t = 0+$:

$I_{C8}(0+) = 10^{-3}\left(800\sqrt{2} + 5A(-\sin(\varphi)+\cos(\varphi))\right);$

$$I_{C8}(0+) = 0.8\sqrt{2} + 0.005A(-\sin(\varphi)+\cos(\varphi)). \quad (8)$$

Найдем ток через конденсатор. Схема для момента времени $t = 0+$ показана на рис 7.

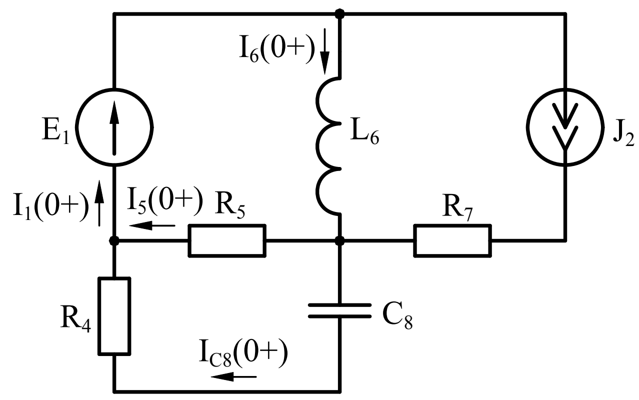


Рис. 7

По 1-му закону Кирхгофа для узла **a** (рис. 7):

$I_1(0+) = I_5(0+) + I_{C8}(0+) = I_6(0+) + J_2(0+);$

$I_5(0+) = I_6(0+) + J_2(0+) - I_{C8}(0+).$

R_5 и R_4, C_8 соединены параллельно, тогда

$$I_5(0+)R_5 = I_{C8}(0+)R_4 + U_{C8}(0+);$$

$$\left(I_6(0+) + J_2(0+) - I_{C8}(0+)\right)R_5 = I_{C8}(0+)R_4 + U_{C8}(0+);$$

$$I_{C8}(0+) = \frac{\left(I_6(0+) + J_2(0+)\right)R_5 - U_{C8}(0+)}{R_4 + R_5};$$

$$I_{C8}(0+) = \frac{\left(0.75\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)\cdot 100 - \left(-50\sqrt{2}\right)}{100 + 100} = 1.625\sqrt{2}\ A. \qquad (9)$$

Из выражений (8) и (9) получаем:

$$1.625\sqrt{2} = 0.8\sqrt{2} + 0.005A\left(-\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\right);$$

$$A\left(-\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\right) = 165\sqrt{2}. \qquad (10)$$

Разделим выражение (10) на выражение (6):

$$-1 + \mathrm{ctg}(\varphi) = -1.5;$$

$$\mathrm{ctg}(\varphi) = -0.5;$$

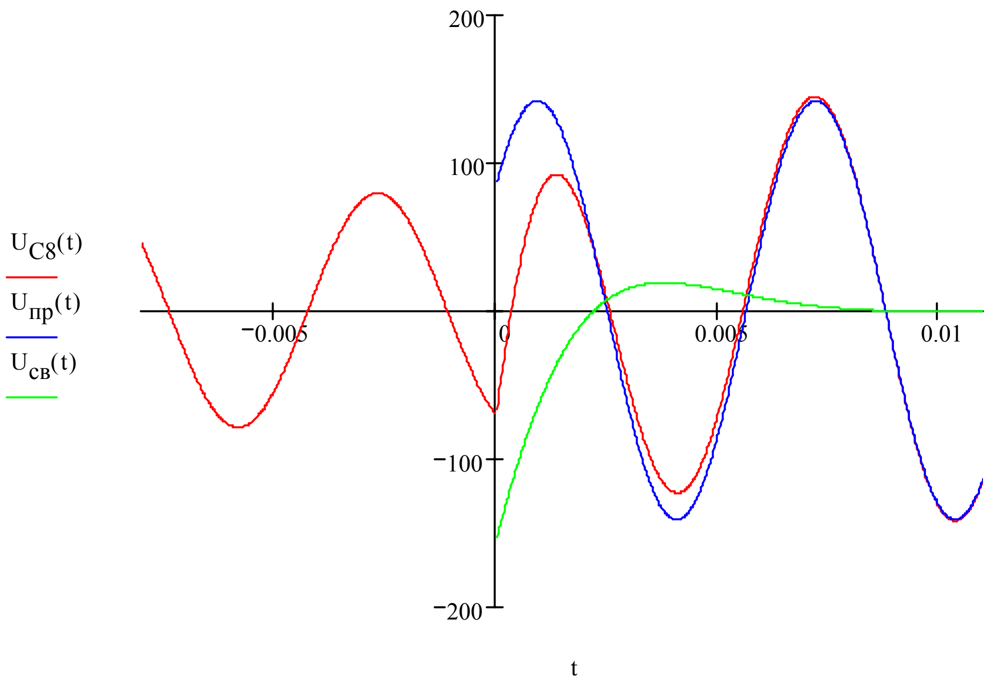
$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{0.5}\right) = -63.4°;$$

$$A = \frac{-110\sqrt{2}}{\sin(-63.4°)} = 55\sqrt{10}\ A.$$

Подставляя A и φ в выражение (4), окончательно получим:

$$U_{C8}(t) = 100\sqrt{2}\cdot\sin(1000t + 36.9°) + 55\sqrt{10}\cdot e^{-500t}\sin(500t - 63.4°).$$

График переходного процесса:



Примечание:

$U_{C8}(t)$ – искомая зависимость,

$U_{пр}(t)$ – принужденная составляющая,

$U_{св}(t)$ – свободная составляющая.

2) Рассчитаем переходной процесс для U_{C8} (t) используя операторный метод, если E=100 В, J=2 А.

Перейдем от реальной цепи к операторной (рис. 8).

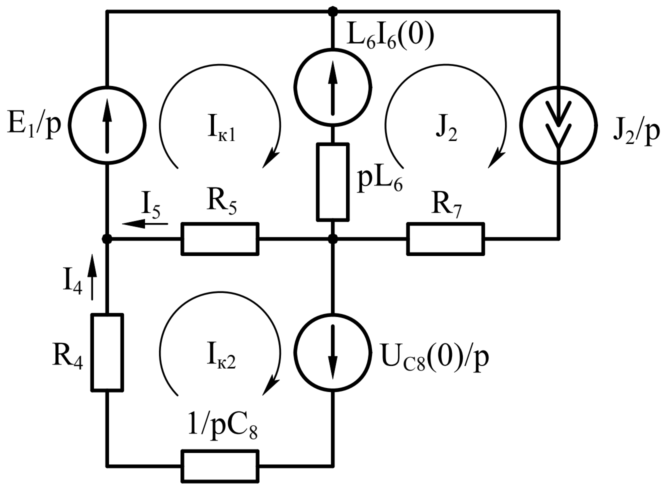


Рис. 8

$I_6(0)$ и $U_{C8}(0)$ найдем рассчитав исходную цепь в момент до коммутации. Для постоянного тока катушка представляет собой короткозамкнутый участок, а конденсатор – разрыв цепи. Схема принимает вид:

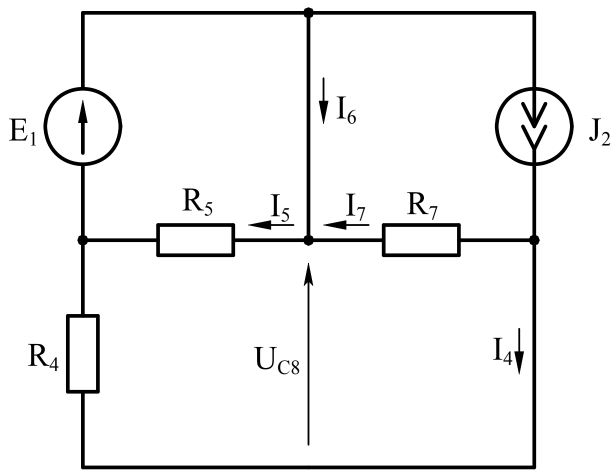


Рис. 9

По закону Ома:

$$I_5 = \frac{E_1}{R_5} = \frac{100}{100} = 1\,A.$$

По 1-му закону Кирхгофа:

$$I_4 = J_2 - I_7.$$

По 2-му закону Кирхгофа:

$$I_4R_4 - I_7R_7 = E_1;$$

$$(J_2 - I_7)\cdot R_4 - I_7R_7 = E_1;$$

$$I_7 = \frac{J_2R_4 - E_1}{R_4 + R_7};$$

$$I_7 = \frac{2\cdot 100 - 100}{100 + 100} = 0.5\,A.$$

По 1-му закону Кирхгофа (ток через катушку):

$$I_6 = I_5 - I_7 = 1 - 0.5 = 0.5\,A.$$

Конденсатор C_8 соединен параллельно с сопротивлением R_7, поэтому напряжение на нем:

$$U_{C8} = I_7R_7 = 0.5\cdot 100 = 50\,B.$$

Итак, напряжение на конденсаторе до размыкания ключа $U_{C8}(0) = 50\,B$, ток через катушку $I_6 = 0.5\,A$.

Воспользуемся методом контурных токов (рис. 8):

$$\begin{cases} I_{\kappa 1}\left(R_5 + pL_6\right) - I_{\kappa 2}R_5 - J_2 / p \cdot pL_6 = E_1 / p - L_6 I_6\left(0\right); \\ -I_{\kappa 1}R_5 + I_{\kappa 2}\left(R_4 + R_5 + 1/pC_8\right) = U_{C8}\left(0\right)/p; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{\kappa 1} = \dfrac{R_5}{R_5 + pL_6} I_{\kappa 2} + \dfrac{E_1 / p - L_6 I_6\left(0\right) + J_2 \cdot L_6}{R_5 + pL_6}; \\ -\left(\dfrac{R_5}{R_5 + pL_6} I_{\kappa 2} + \dfrac{E_1 / p - L_6 I_6\left(0\right) + J_2 \cdot L_6}{R_5 + pL_6}\right) R_5 + I_{\kappa 2}\left(R_4 + R_5 + 1/pC_8\right) = U_{C8}\left(0\right)/p; \end{cases}$$

$$I_{\kappa 2}\left(R_4 + R_5 + 1/pC_8 - \frac{R_5^2}{R_5 + pL_6}\right) = U_{C8}\left(0\right)/p + \frac{E_1 / p - L_6 I_6\left(0\right) + J_2 \cdot L_6}{R_5 + pL_6} \cdot R_5;$$

$$I_{\kappa 2} = \frac{U_{C8}\left(0\right)/p + \dfrac{E_1 / p - L_6 I_6\left(0\right) + J_2 \cdot L_6}{R_5 + pL_6} \cdot R_5}{R_4 + R_5 + 1/pC_8 - \dfrac{R_5^2}{R_5 + pL_6}};$$

$$I_{\kappa 2} = \frac{\dfrac{50}{p} + \dfrac{100/p - 0.1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.1}{100 + 0.1p} \cdot 100}{100 + 100 + 1/p10^{-5} - \dfrac{100^2}{100 + 0.1p}} = \frac{p + 750}{p^2 + 1000p + 500000};$$

$$I_{\kappa 1} = \frac{100}{100 + 0.1p} \cdot \frac{p + 750}{p^2 + 1000p + 500000} + \frac{100/p - 0.1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.1}{100 + 0.1p} = 0.5 \cdot \frac{3p^2 + 4000p + 1000000}{p\left(p^2 + 1000p + 500000\right)}.$$

Токи в ветвях:

$$I_4 = I_{\kappa 2} = \frac{p + 750}{p^2 + 1000p + 500000};$$

$$I_5 = I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2} = 0.5 \cdot \frac{3p^2 + 4000p + 1000000}{p\left(p^2 + 1000p + 500000\right)} - \frac{p + 750}{p^2 + 1000p + 500000} =$$

$$= 0.5 \frac{p^2 + 2500p + 1000000}{p\left(p^2 + 1000p + 500000\right)}.$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U_{C8}\left(p\right) = I_4 R_4 - I_5 R_5 = 100 \cdot \left(\frac{p + 750}{p^2 + 1000p + 500000} - 0.5 \frac{p^2 + 2500p + 1000000}{p\left(p^2 + 1000p + 500000\right)}\right) =$$

$$= 50 \frac{p^2 - 1000p - 1000000}{p\left(p^2 + 1000p + 500000\right)}.$$

Теперь можно найти оригинал путем применения теоремы разложения. Приравнивая знаменатель к нулю $p\left(p^2 + 1000p + 500000\right) = 0$, найдем корни:

$p_1 = 0$,

$p_2 = -500 + j500$,

$p_3 = -500 - j500$.

Далее подставим найденные корни в выражение

$$U_{C8}(t)=50\cdot\frac{0^2-1000\cdot 0-1000000}{0^2+1000\cdot 0+500000}+\sum_{k=2}^{3}50\frac{p_k^2-1000p_k-1000000}{p_k\left(p_k^2+1000p_k+500000\right)'}e^{p_kt}=$$

$$=-100+50\sum_{k=2}^{3}\frac{p_k^2-1000p_k-1000000}{p_k\left(2p_k+1000\right)}e^{p_kt}=$$

$$=-100+50\frac{(-500+j500)^2-1000\cdot(-500+j500)-1000000}{(-500+j500)\left(2(-500+j500)+1000\right)}e^{(-500+j500)t}+$$

$$+50\frac{(-500-j500)^2-1000\cdot(-500-j500)-1000000}{(-500-j500)\left(2(-500-j500)+1000\right)}e^{(-500-j500)t}=$$

$$=-100+\left(150\cos(500t)-50\sin(500t)\right)e^{-500t}=-100-50\sqrt{10}\cdot e^{-500t}\sin\left(500t-71.6°\right)B.$$

Таким образом, окончательно получаем

$U_{C6}(t)=-100-50\sqrt{10}\cdot e^{-500t}\sin\left(500t-71.6°\right)B.$

График переходного процесса: