

№1. Методы анализа линейных разветвленных электрически цепей при синусоидальных воздействиях (II курс, все группы)

Рассчитать токи в заданной схеме методом контурных токов, методом узловых потенциалов и неизвестный ток в одной ветви методом эквивалентного источника. Построить векторные диаграммы токов для одного из узлов и напряжений для одного из контуров, содержащего источник ЭДС. Проверку правильности выполнения расчета осуществить методом баланса мощностей. Определить показания приборов, измеряющих действительное значение. В ответе указать значения токов в комплексной форме и во временной для тока, рассчитанного методом эквивалентного источника, показания приборов. Единицы измерения: $e[B]$, $i[A]$, $R[Ом]$, $L[мГн]$, $C[мкФ]$.

\underline{E}_2	\underline{E}_4	e_6	i_{J_1}	R_1	R_2	L_2	L_5	L_6	C_2	C_3	C_5
$200 + j400$	$-j200$	$100\sqrt{2} \sin(10^3 t - 90^\circ)$	$\sqrt{2} \sin(10^3 t - 90^\circ)$	100	0	150	400	100	4/3	5	5

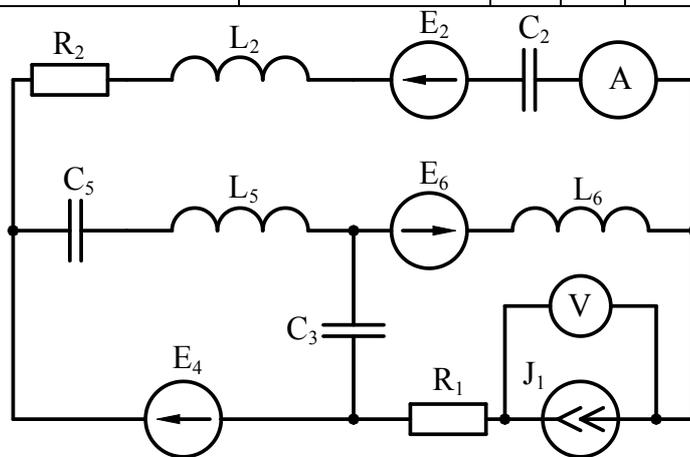


Рис. 1

Решение

Метод контурных токов

Идея метода: уравнения составляются только по второму закону Кирхгофа, но не для действительных, а для воображаемых токов, циркулирующих по замкнутым контурам.

Выберем направления токов в ветвях и направления контурных токов как показано на рис. 2. При этом учитываем, что контурный ток в контуре с источником тока равен току источника тока.

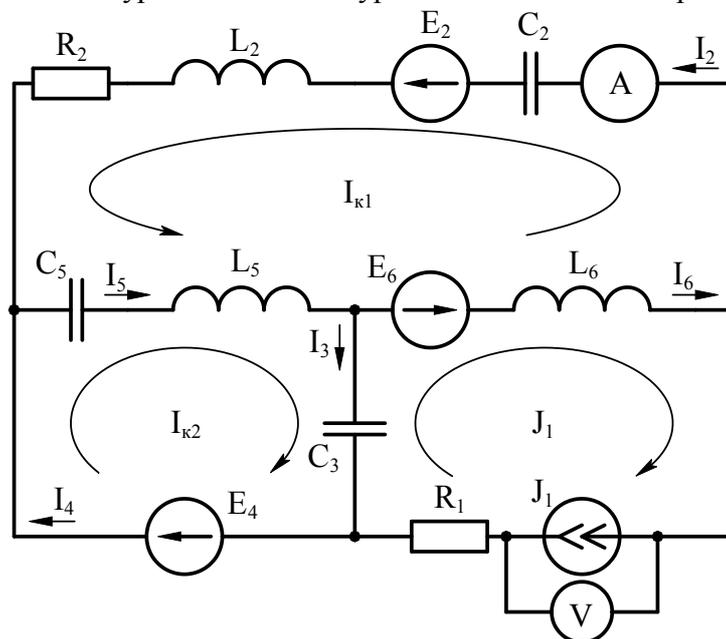


Рис. 2

$$\begin{cases} \underline{I}_{\kappa 1} \left(R_2 + j(\omega(L_2 + L_5 + L_6) - 1/\omega C_2 - 1/\omega C_5) \right) + \underline{I}_{\kappa 2} \cdot j(\omega L_5 - 1/\omega C_5) + \underline{J}_1 \cdot j\omega L_6 = \underline{E}_2 + \underline{E}_6; \\ \underline{I}_{\kappa 1} \cdot j(\omega L_5 - 1/\omega C_5) + \underline{I}_{\kappa 2} \cdot j(\omega L_5 - 1/\omega C_5 - 1/\omega C_3) - \underline{J}_1 \cdot (-j(1/\omega C_3)) = \underline{E}_4. \end{cases}$$

Подставим численные значения ($\omega = 1000 \text{ рад/с}$):

$$\begin{cases} \underline{I}_{\kappa 1} (0 + j(650 - 750 - 200)) + \underline{I}_{\kappa 2} \cdot j(400 - 200) + (-j\sqrt{2}) \cdot j100 = 200 + j400 + (-j100\sqrt{2}); \\ \underline{I}_{\kappa 1} \cdot j(400 - 200) + \underline{I}_{\kappa 2} \cdot j(400 - 200 - 200) - (-j\sqrt{2}) \cdot (-j200) = -j200; \\ -j300 \cdot \underline{I}_{\kappa 1} + j200 \cdot \underline{I}_{\kappa 2} = 200 - 100\sqrt{2} + j(400 - 100\sqrt{2}); \\ j200 \cdot \underline{I}_{\kappa 1} = -200\sqrt{2} - j200; \end{cases}$$

$$\underline{I}_{\kappa 1} = \frac{-200\sqrt{2} - j200}{j200} = -1 + j\sqrt{2} = -1 + j1.414 \text{ A};$$

$$-j300 \cdot (-1 + j\sqrt{2}) + j200 \cdot \underline{I}_{\kappa 2} = 200 - 100\sqrt{2} + j(400 - 100\sqrt{2});$$

$$j200 \cdot \underline{I}_{\kappa 2} = 200 - 400\sqrt{2} + j(100 - 100\sqrt{2});$$

$$\underline{I}_{\kappa 2} = \frac{200 - 400\sqrt{2} + j(100 - 100\sqrt{2})}{j200} = -\frac{\sqrt{2} - 1}{2} + j(2\sqrt{2} - 1) = -0.207 + j1.828 \text{ A};$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{\kappa 1} = -1 + j1.414 = 1.732e^{j125.3^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{\kappa 2} - \underline{J}_1 = -0.207 + j1.828 - (-j1.414) = -0.207 + j3.243 = 3.249e^{j93.7^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{\kappa 2} = -0.207 + j1.828 = 1.84e^{j96.5^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{\kappa 1} + \underline{I}_{\kappa 2} = -1 + j1.414 - 0.207 + j1.828 = -1.207 + j3.243 = 3.46e^{j110.4^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_6 = \underline{I}_{\kappa 1} + \underline{J}_1 = -1 + j1.414 + (-j1.414) = -1 = 1e^{j180^\circ} \text{ A}.$$

Метод узловых потенциалов

Данный метод вытекает из первого закона Кирхгофа. В качестве неизвестных принимаются потенциалы узлов, по найденным значениям которых с помощью закона Ома для участка цепи с источником ЭДС затем находят токи в ветвях. Поскольку потенциал – величина относительная, потенциал одного из узлов (любого) принимается равным нулю.

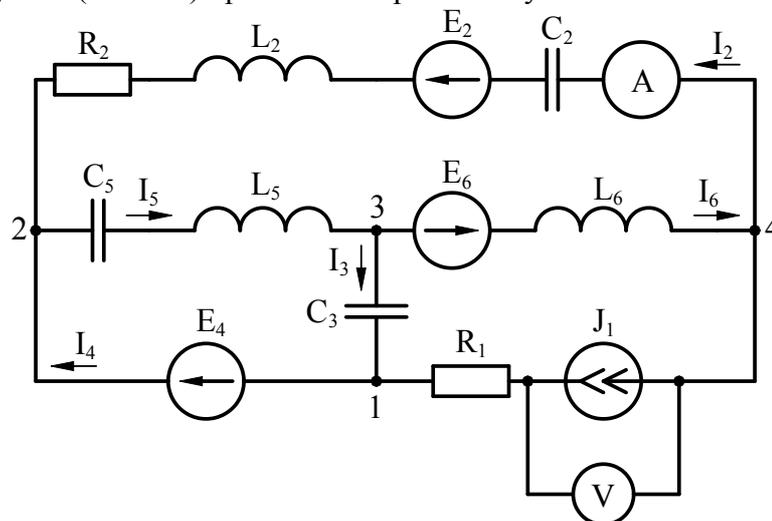


Рис. 3

Принимаем потенциал точки 1 равным 0. Тогда потенциал в точке 2 $\varphi_2 = 0 + E_4 = E_4$, а в точках 3 и 4 – φ_3 и φ_4 соответственно. По первому закону Кирхгофа (для узлов 3 и 4):

$$\begin{cases} \underline{I}_5 - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0 \\ \underline{I}_6 - \underline{I}_2 - \underline{J}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{где } \underline{I}_2 = \frac{\underline{\varphi}_4 - \underline{\varphi}_2 + \underline{E}_2}{R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)} = \frac{\underline{\varphi}_4 - \underline{E}_4 + \underline{E}_2}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_1}{-j(1/\omega C_3)} = -\frac{\underline{\varphi}_3}{j(1/\omega C_3)};$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_3}{j(\omega L_5 - 1/\omega C_5)} = \frac{\underline{E}_4 - \underline{\varphi}_3}{j(\omega L_5 - 1/\omega C_5)};$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 + \underline{E}_6}{j\omega L_6}.$$

Подставляя выражения для токов, получим:

$$\begin{cases} \frac{\underline{E}_4 - \underline{\varphi}_3}{j(\omega L_5 - 1/\omega C_5)} + \frac{\underline{\varphi}_3}{j(1/\omega C_3)} - \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 + \underline{E}_6}{j\omega L_6} = 0 \\ \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 + \underline{E}_6}{j\omega L_6} - \frac{\underline{\varphi}_4 - \underline{E}_4 + \underline{E}_2}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)} - \underline{J}_1 = 0 \end{cases}$$

Подставим численные значения:

$$\begin{cases} \frac{-j200 - \underline{\varphi}_3}{j(400 - 200)} + \frac{\underline{\varphi}_3}{j200} - \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 - j100\sqrt{2}}{j100} = 0 \\ \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 - j100\sqrt{2}}{j100} - \frac{\underline{\varphi}_4 + j200 + 200 + j400}{j(150 - 750)} + j\sqrt{2} = 0 \\ \frac{-j200 - \underline{\varphi}_3}{j200} + \frac{\underline{\varphi}_3}{j200} - \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 - j100\sqrt{2}}{j100} = 0 \\ \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4 - j100\sqrt{2}}{j100} + \frac{\underline{\varphi}_4 + 200 + j600}{j600} + j\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\varphi}_4 = 1.2\underline{\varphi}_3 + (40 - 120\sqrt{2}) + j120(1 - \sqrt{2});$$

$$\frac{-j200 - \underline{\varphi}_3}{j200} + \frac{\underline{\varphi}_3}{j200} - \frac{\underline{\varphi}_3 - (1.2\underline{\varphi}_3 + (40 - 120\sqrt{2}) + j120(1 - \sqrt{2})) - j100\sqrt{2}}{j100} = 0;$$

Откуда $\underline{\varphi}_3 = 648.528 + j41.421 B$.

$$\underline{\varphi}_4 = 1.2(648.528 + j41.421) + (40 - 120\sqrt{2}) + j120(1 - \sqrt{2}) = 648.528 B.$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\varphi}_4 - \underline{E}_4 + \underline{E}_2}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)} = \frac{648.528 - (-j200) + (200 + j400)}{j(150 - 750)} = -1 + j1.414 A;$$

$$\underline{I}_3 = \frac{648.528 + j41.421}{-j200} = -0.207 + j3.243 A;$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_3 + \underline{J}_1 = -0.207 + j3.243 + (-j1.414) = -0.207 + j1.828 A$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{E}_4 - \underline{\varphi}_3}{j(\omega L_5 - 1/\omega C_5)} = \frac{-j200 - (648.528 + j41.421)}{j(400 - 200)} = -1.207 + j3.243 A;$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + \underline{E}_6}{j\omega L_6} = \frac{648.528 + j41.421 - 648.528 + (-j100\sqrt{2})}{j100} = -1 A.$$

Метод эквивалентного генератора

Этим методом рассчитаем ток \underline{I}_3 . Рассматриваемая цепь (рис. 1) примет вид:

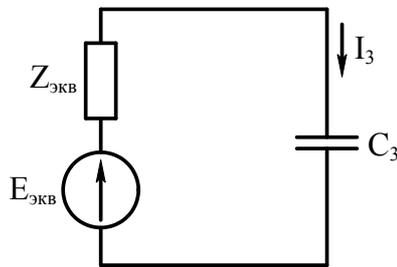


Рис. 4

где значения $\underline{Z}_{\text{эКВ}}$ и $\underline{E}_{\text{эКВ}}$ определяются из следующих соображений:

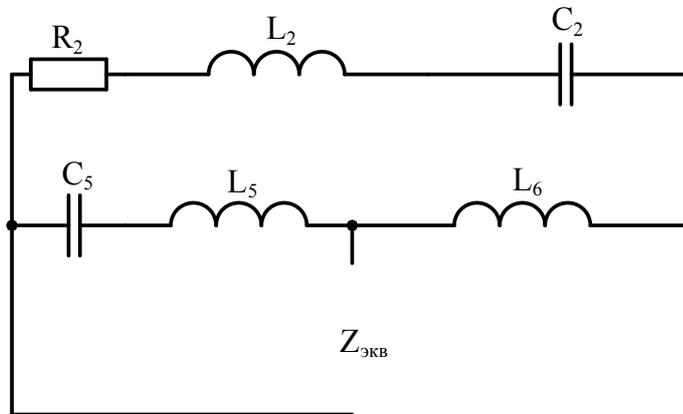


Рис. 5

$$\underline{Z}_{\text{эКВ}} = \frac{(R_2 + j(\omega(L_2 + L_6) - 1/\omega C_2)) \cdot j(\omega L_5 - 1/\omega C_5)}{R_2 + j(\omega(L_2 + L_6) - 1/\omega C_2) + j(\omega(L_5) - 1/\omega C_5)};$$

$$\underline{Z}_{\text{эКВ}} = \frac{(0 + j(150 + 100 - 750)) \cdot j(400 - 200)}{0 + j(150 + 100 - 750) + j(400 - 200)} = \frac{-j500 \cdot j200}{-j300} = j \frac{1000}{3}.$$

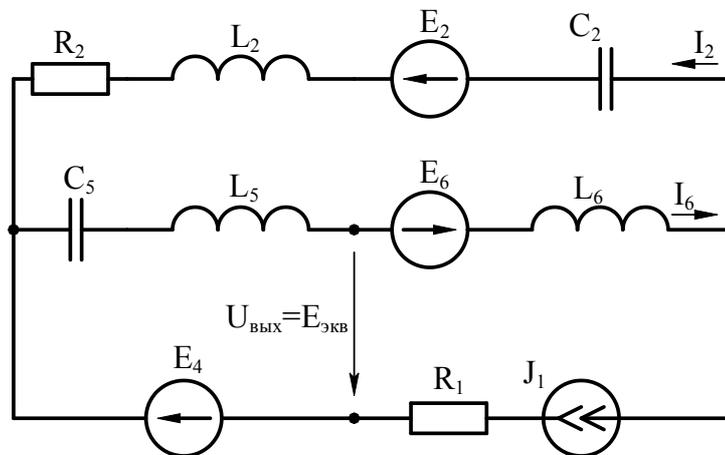


Рис. 6

По 1-му закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_6 - \underline{J}_1.$$

По 2-му закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_6 \cdot j(\omega(L_5 + L_6) - 1/\omega C_5) + \underline{I}_2 (R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)) = \underline{E}_2 + \underline{E}_6;$$

$$\underline{I}_6 \cdot j(\omega(L_5 + L_6) - 1/\omega C_5) + (\underline{I}_6 - \underline{J}_1)(R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)) = \underline{E}_2 + \underline{E}_6;$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{E}_2 + \underline{E}_6 + \underline{J}_1(R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2))}{R_2 + j(\omega(L_2 + L_5 + L_6) - 1/\omega C_5 - 1/\omega C_2)};$$

$$\underline{I}_6 = \frac{200 + j400 + (-j100\sqrt{2}) + (-j\sqrt{2})(0 + j(150 - 750))}{0 + j(150 + 400 + 100 - 200 - 750)} = -0.862 - j \cdot 2.162 \text{ A.}$$

Искомое значение $E_{\text{экв}}$:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{экв}} = \underline{U}_{\text{вых}} = \underline{E}_4 - \underline{I}_6 \cdot j(\omega L_5 - 1/\omega C_5) &= -j200 - (-0.862 - j \cdot 2.162) \cdot j \cdot (400 - 200) = \\ &= -432.352 - j27.614 \text{ B.} \end{aligned}$$

Искомый ток \underline{I}_3 :

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_{\text{экв}}}{\underline{Z}_{\text{экв}} - j \frac{1}{\omega C_3}} = \frac{-432.352 - j27.614}{j \frac{1000}{3} - j200} = -0.207 + j3.243 \text{ A.}$$

Векторная диаграмма токов

Построим векторную диаграмму токов для узла 1 (рис. 3).

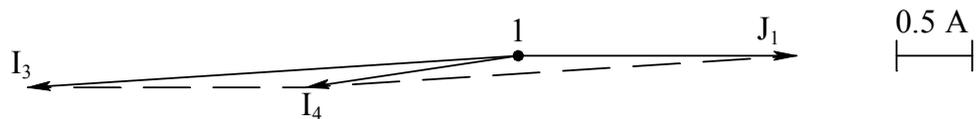


Рис. 7

Векторная диаграмма напряжений

Построим векторную диаграмму напряжений для контура 1231 (рис.3).

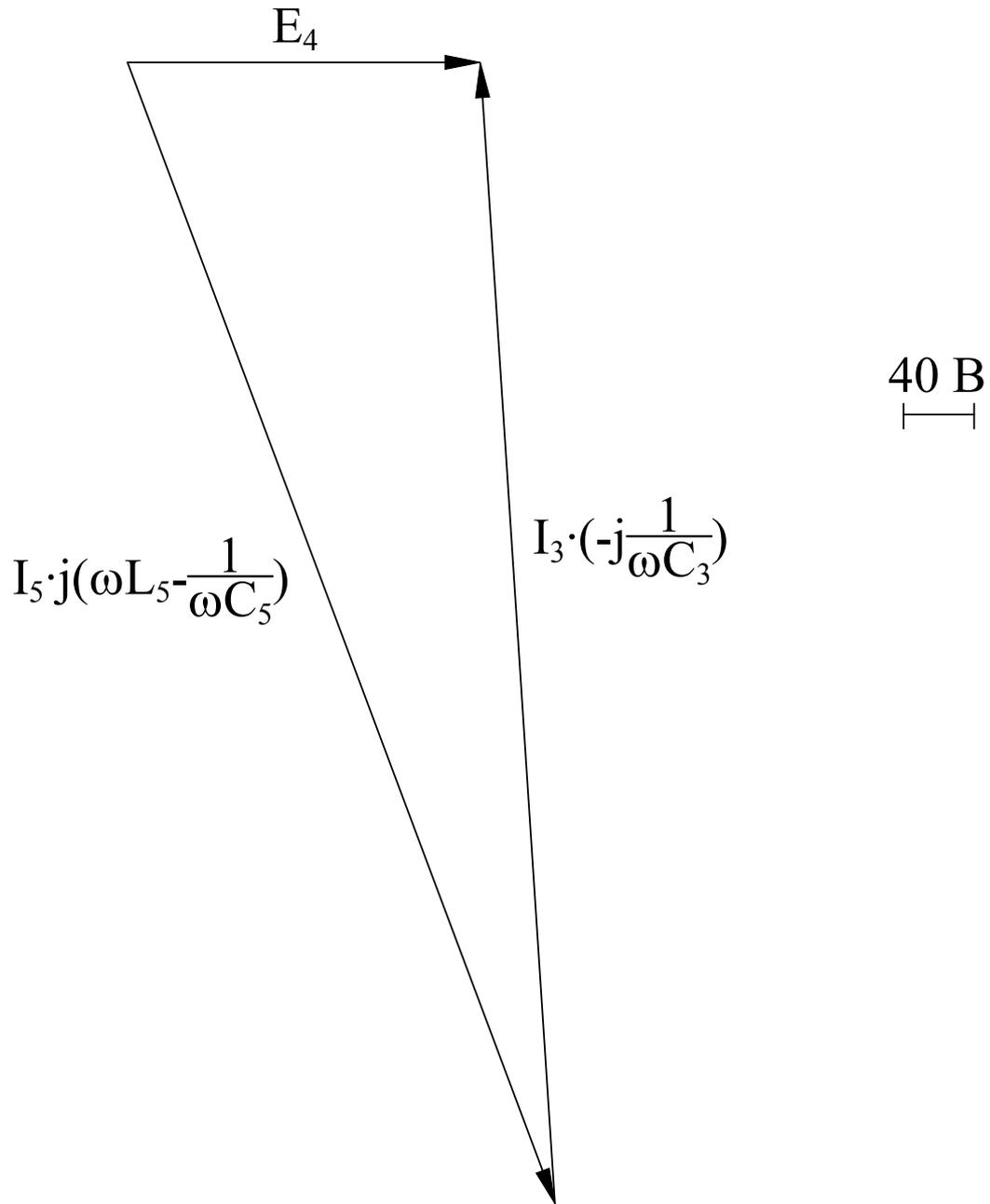


Рис. 8

Баланс мощности

Полная мощность источника ЭДС находится по формуле:

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}^*$$

где \underline{I}^* – комплекс, сопряженный с комплексом \underline{I} .

Суммарная мощность источников:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{ист}\Sigma} &= \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{E}_4 \cdot \underline{I}_4^* + \underline{E}_6 \cdot \underline{I}_6^* + (\underline{I}_6 \cdot j\omega L_6 + \underline{I}_3 \cdot j(-1/\omega C_3) - \underline{I}_1 \cdot R_1) \cdot \underline{I}_1^* = \\ &= (200 + j400)(-1 - j1.414) + (-j200)(-0.207 - j1.828) + (-j100\sqrt{2})(-1) + \\ &+ [(-1) \cdot j100 + (-0.207 + j3.243) \cdot (-j200) - (-j\sqrt{2}) \cdot 100] \cdot j\sqrt{2} = 200 - j1417.16 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Т. к. реактивная мощность получилась со знаком «-», то это означает, что реактивная мощность не генерируется источниками, а потребляется.

Мощность, потребляемая в цепи:

$$\begin{aligned}\underline{S}_P &= J_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot (R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)) + I_3^2 \cdot (-j1/\omega C_3) + I_5^2 \cdot j(\omega L_5 - 1/\omega C_5) + I_6^2 \cdot j\omega L_6 = \\ &= (\sqrt{2})^2 \cdot 100 + 1.732^2 \cdot (0 + j(150 - 750)) + 3.249^2 \cdot (-j200) + 3.46^2 \cdot j(400 - 200) + (-1)^2 \cdot j100 = \\ &= 200 - j1417.16 \text{ ВА}.\end{aligned}$$

Баланс мощности выполняется.

Показания приборов

Ток через амперметр:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_2 = 1.732e^{j125.3^\circ} \text{ A}.$$

Действительное (измеряемое) значение тока:

$$I_A = \frac{|\underline{I}_A|}{\sqrt{2}} = \frac{1.732}{\sqrt{2}} = 1.225 \text{ A}.$$

Напряжение на вольтметре:

$$\begin{aligned}\underline{U}_V &= \underline{I}_6 \cdot j\omega L_6 + \underline{I}_3 \cdot j(-1/\omega C_3) - \underline{I}_1 \cdot R_1 = (-1) \cdot j100 + (-0.207 + j3.243) \cdot (-j200) - (-j\sqrt{2}) \cdot 100 = \\ &= -648.528 - j141.421 = 663.769e^{-j167.7} \text{ В}.\end{aligned}$$

Действительное (измеряемое) значение напряжения:

$$U_V = \frac{|\underline{U}_V|}{\sqrt{2}} = \frac{663.769}{\sqrt{2}} = 469.36 \text{ В}.$$

Ответ: $\underline{I}_2 = 1.732e^{j125.3^\circ} \text{ A};$

$$\underline{I}_3 = 3.249e^{j93.7^\circ} \text{ A}, \quad I_3(t) = 3.249 \sin(1000t + 93.7^\circ) \text{ A};$$

$$\underline{I}_4 = 1.84e^{j96.5^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_5 = 3.46e^{j110.4^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_6 = 1e^{j180^\circ} \text{ A};$$

$$I_A = 1.225 \text{ A};$$

$$U_V = 469.36 \text{ В}.$$