1. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$

Решение:

Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9} = \frac{A(x-1)(x^2+9)+B(x^2+9)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+9)}$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие слева и справа должны совпадать:

$$A(x-1)(x^2+9)+B(x^2+9)+(Cx+D)(x-1)^2 = 3x^3+x+46$$

$$A(x^3-x^2+9x-9)+B(x^2+9+C(x^3-2x^2+x)+D(x^2-2x+1) = 3x^3+x+46$$

$$\begin{array}{ll|l} x^3: & A+C=3 & \\ x^2: & -A+B-2C+D=0 & \text{Решим систему уравнений} \\ x^1: & 9A+C-2D=1 & \text{Методом крамера} \\ x^0: & -9A+9B+D=46 & \end{array}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & -2 \\ -9 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 100, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 46 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & -2 \\ -9 & 46 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 500, \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & -2 \\ -9 & 9 & 46 & 1 \end{vmatrix} = 300$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 1 \\ -9 & 9 & 0 & 46 \end{vmatrix} = 100$$

$A=0,\ B=5,\ C=3,\ D=1.$ следовательно, интеграл будет иметь вид:

$$\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx = \int \left(\frac{5}{(x-1)^2} + \frac{3x+1}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{5dx}{(x-1)^2} + \int \frac{3xdx}{x^2+9} + \int \frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= 5\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} + \int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{-5}{x-1} + \frac{3}{2}\ln|x^2+9| + \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + c$$

Ответ: $\frac{-5}{x-1} + \frac{3}{2}\ln|x^2+9| + \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + c$

2. Найти определенный интеграл: $\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x\,dx$

Решение:

$$\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x\,dx=\int_{-4}^{0}x^2\cos x\,dx+\int_{-4}^{0}7x\cos x\,dx+\int_{-4}^{0}12\cos x\,dx$$

Первое слагаемое берем 2 раза по частям, второе слагаемое 1 раз.

1) $\int_{-4}^{0}x^2\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=cosxdx & v=sinx \end{vmatrix}=x^2sinx\Big|_{-4}^{0}-2\int_{-4}^{0}xsinxdx=$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=sinxdx & v=-cosx \end{vmatrix}=-16\sin(-4)+2xcosx\Big|_{-4}^{0}-2\int_{-4}^{0}cosxdx=$$

$$=16\sin(4)+8\cos(-4)-2sinx\Big|_{-4}^{0}=16\sin(4)+8\cos(4)-2\sin(4)=$$

$$=14sin4+8cos4$$

2) $\int_{-4}^{0}7x\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=cosxdx & v=sinx \end{vmatrix}=7xsinx\Big|_{-4}^{0}-7\int_{-4}^{0}sinxdx=$

$$=-28sin4+7cosx\Big|_{-4}^{0}=-28sin4+7-7cos4$$

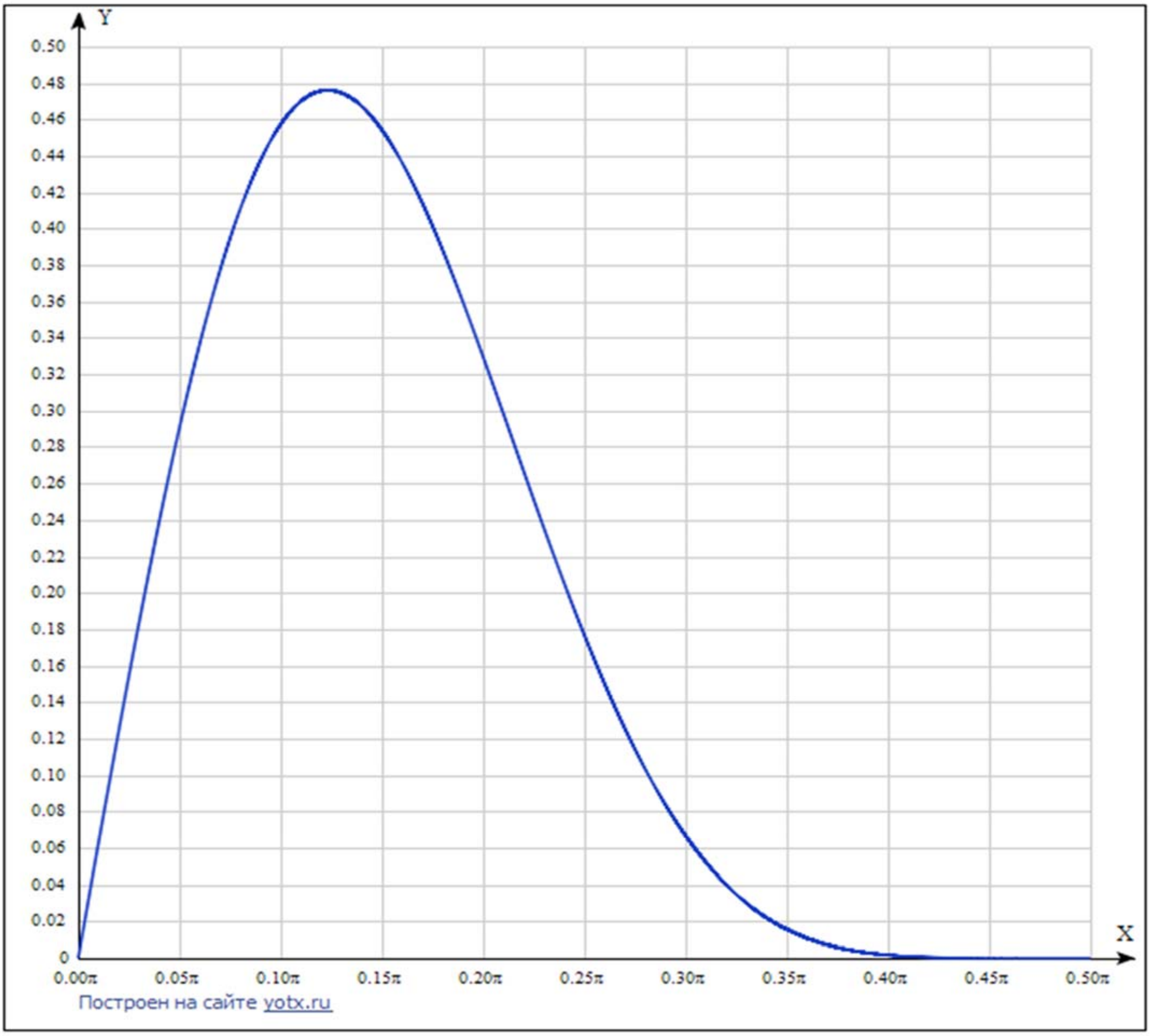
3) $\int_{-4}^{0}12\cos x\,dx=12sinx\Big|_{-4}^{0}=12sin4$

$$\int_{-4}^{0}x^2\cos x\,dx+\int_{-4}^{0}7x\cos x\,dx+\int_{-4}^{0}12\cos x\,dx$$
$$=14sin4+8cos4-28sin4+7-7cos4+12sin4=-2sin4+cos4+7$$

Ответ: $-2sin4+cos4+7\approx 7.86$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

$$y = cos^5 x\sin(2x)\,, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$



Нам нужно найти площадь под графиком функции $y = cos^5 x\sin(2x)$. Снизу фигура ограничивается прямой y=0, что является осью оX. Составим интеграл для нахождения площади:

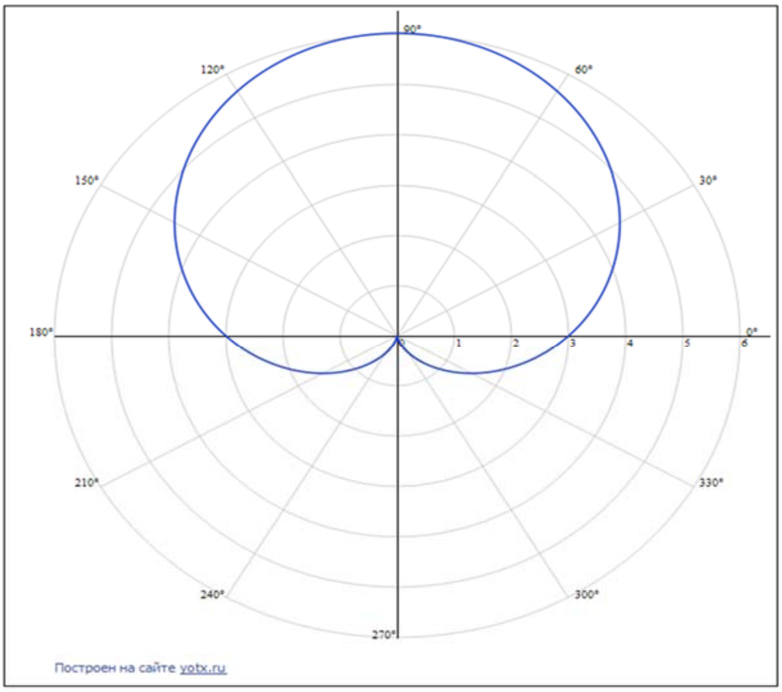
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5 x\sin(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^6 x\,2\sin x\,dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^6 x\,d(cosx) = -2\frac{cos^7 x}{7}\Big|_{-4}^{0} = \frac{2}{7}$$

Ответ: $S = \frac{2}{7}$

4. Вычислить длины дуги кривой, заданной уравнением:

$$\rho = 3(1 + sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$$

Решение:



Кривая называется кардиоидой

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

$$\rho'(\varphi) = 3cos\varphi, \qquad \left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2 = 9(1 + sin\varphi)^2 + 9\cos^2\varphi =$$

$$= 9(1 + 2sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 9(1 + 2sin\varphi + 1) = 18(1 + sin\varphi).$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sqrt{18(1 + sin\varphi)}\, d\varphi = 3\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sqrt{\left(1 - \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}\, d\varphi =$$

$$= 3\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}\, d\varphi = 6\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})\, d\varphi =$$

$$= -12\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 1.9$$

Ответ: $L = 6(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 1.9$

5. Найти интеграл дифференциального уравнения: $y' + y = xy^2, y(0) = 1$

Решение:

Данное ДУ является уравнением Бернулли, избавимся от у в правой части, разделив уравнение на y^2, далее с помощью замены $z = \frac{1}{y}$ приведем уравнение к виду линейного ДУ первого порядка, которое решается методом вариации произвольной постоянной.

$y' + y = xy^2;$	Делим на y^2
$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{y^2} = x;$	Сокращаем у
$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = x;$	Делаем замену $z = \frac{1}{y}, z' = \frac{-y\prime}{y^2}$
$z' - z = -x;$	$z = uv, z' = u'v + v'u$
$u'v - v'u;$	
$u'v + v'u - uv = -x;$	
$u'v + u(v' - v) = -x$	
$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = -x \end{cases}$	Находим из этой системы v и u

$$v' - v = 0, \qquad \frac{dv}{dx} = v, \qquad \frac{dv}{v} = dx, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int dx, \qquad \ln v = x, \qquad v = e^x.$$

$$u'v = -x, \qquad u'e^x = -x, \qquad \frac{du}{dx} = -xe^{-x}, \qquad \int du = \int -xe^{-x}\,dx$$

Интегрируем по частям: $\begin{vmatrix} u = -x & du = -dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix}$

$$u = xe^{-x} - \int e^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x} + c = \frac{x+1}{e^x} + c;$$

$$z = uv \Rightarrow z = \left(\frac{x+1}{e^x} + c\right) * e^x = x + 1 + ce^x$$

$$y = \frac{1}{z} \Longrightarrow y = \frac{1}{ce^x + x + 1}$$

$$y(0) = 1, y(0) = \frac{1}{ce^0 + 0 + 1} = \frac{1}{c+1} = 1; c = 0$$

Ответ: $y = \frac{1}{x+1}$;

6. Найти интеграл дифференциального уравнения

$$x^4y'' + x^3y' = 4$$

Решение:

Понизим порядок ДУ:

$$v(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx}$$

$$x^4\frac{dv}{dx} + x^3v = 4$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{4}{x^3}$$

Второе слагаемое можно представить в виде $1 * v$, и заменить 1 как $\frac{d}{dx}(x)$, тогда вся левая часть может быть заменена на $\frac{d(xv)}{dx}$. Так как выполняется равенство

$\frac{d(xv)}{dx} = xv' + x'v,\ v' = \frac{dv}{dx}, x' = \frac{dx}{dx} = 1.$

$$\frac{d}{dx}(xv) = \frac{4}{x^3}$$

$$d(xv) = \frac{4}{x^3}dx, \qquad \int d(xv) = \int \frac{4}{x^3}dx$$

$$xv = -\frac{2}{x^2} + c$$

Отсюда находим v: $v = -\frac{2}{x^3} + \frac{c}{x}$, так как $v = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} + \frac{c}{x}$

$$\int dy = \int -\frac{2}{x^3}dx + \int \frac{c}{x}dx$$

$$y = c_1 lnx + \frac{1}{x^2} + c_2$$

Ответ: $y = c_1 lnx + \frac{1}{x^2} + c_2$