(7) Ур-ие теплопроводности:

$$u_t = u_{xx} + f(x); \quad (a=1)$$

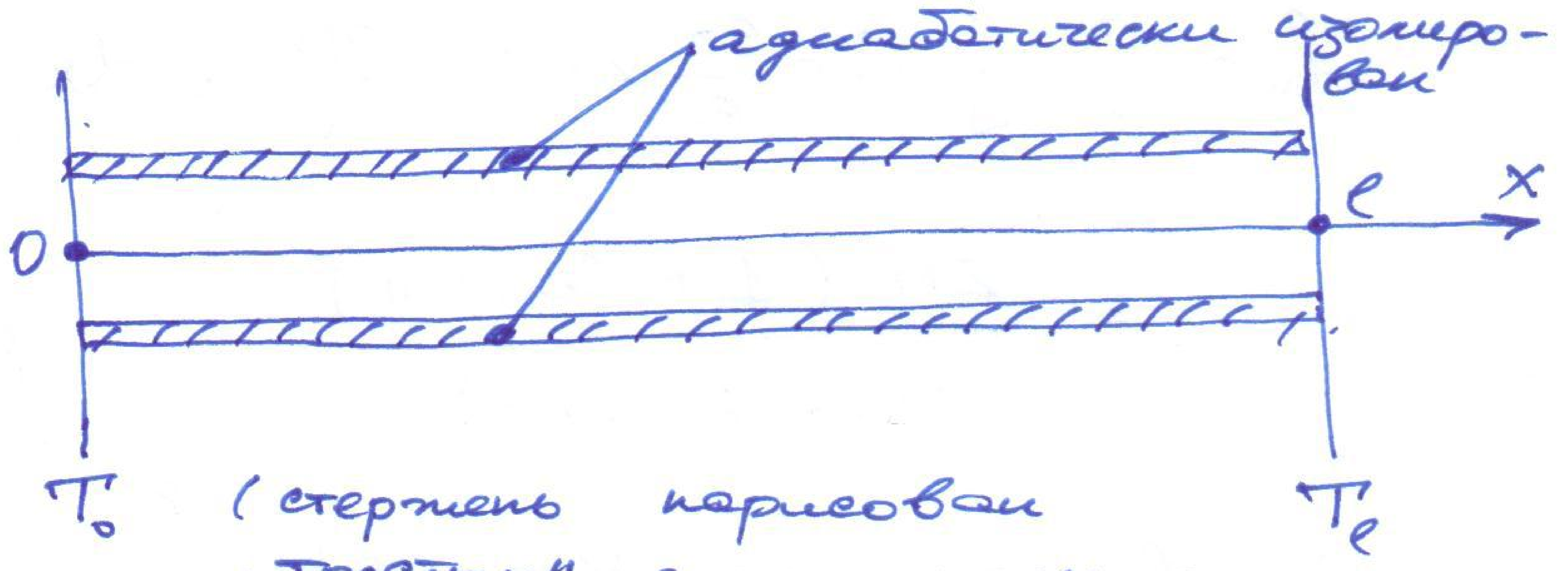
$$\boxed{u_t = u_{xx} + \cos\frac{5\pi x}{l}}$$

→ энергия от тепловых источников

$$\begin{cases} u(0,t) = T_0 = 5; \\ u(l,t) = T_l = 0; \end{cases}$$ граничные условие

$$u(x,0) = \varphi(x) = 5\cdot\cos\frac{3\pi}{l}x - 2\cos\frac{2\pi}{l}x;$$

→ начальные условие



(стержень нарисован „толстым" для улучшения графического восприятия)

сделаем замену переменных, чтобы свести задачу к задаче на собственные ф-ии.

пусть:

$$\boxed{u(x,t) = v(x,t) + \tilde{U}(x),}$$

где $\tilde{U}(x) = T_0 + \frac{T_l - T_0}{l}x = 5 - \frac{5}{l}x$ → „усредненная температура"

$$\tilde{U}(x) = 5\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

тогда задача сводится к следующей задаче Коши для $v(x,t)$:

$$\underline{v_t = v_{xx} + \tilde{f}(x)} \qquad \tilde{f}(x) = f(x) - \underset{\overset{\|}{0}}{\tilde{U}_t(x)} = \cos\frac{5\pi x}{l}$$

$$v_t = v_{xx} + \cos\frac{5\pi x}{l};$$

$$\begin{cases} v(0;t) = 0; \\ v(l;t) = 0; \end{cases}$$ → новые граничные условие;

$$v(x,0) = \varphi(x) - \tilde{U}(x,0) = 5\cdot\cos\frac{3\pi}{l}x - 2\cos\frac{2\pi}{l}x - 5\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \tilde{\varphi}(x)$$

теперь:

замена $v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + w(x,t)$

$$\tilde{v}_t = \tilde{v}_{xx};$$

$$\begin{cases} \tilde{v}(0,t) = 0; \\ \tilde{v}(l,t) = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{v}(x,0) = \tilde{\varphi}(x) = 5\cos\frac{3\pi}{l}x - 2\cos\frac{2\pi}{l}x - 5\left(1 - \frac{x}{l}\right);$$

$$W_t = W_{xx} + \tilde{f}(x)$$

$$\begin{cases} w(0,t) = 0; \\ w(l,t) = 0; \end{cases}$$

$$w(x,0) = 0;$$

1) Решаем методом собственных функций:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x$$

подставляем в ур-ие для $w(x,t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t)\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x = -\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x + \cos\frac{5\pi}{l}x\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{w}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot w_n(t)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x = \cos\frac{5\pi}{l}x\,;$$

Раскладываем правую часть в ряд по синусам:

$$\cos\frac{5\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\,;$$

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{5\pi}{l}x\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l\left[\sin\frac{\pi(n+5)}{l}x + \sin\frac{\pi(5-n)}{l}x\right]dx =$$

$$= \frac{2n\,(1+\cos n\pi)}{\pi(-25+n^2)}$$

Для всех нечетных n коэффициенты разложения равны нулю

$$\Rightarrow\quad f_n = 0 \qquad \underline{\forall n = 2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, 3\ldots$$

[для $n=5$ также равно нулю]

$$\boxed{f_n = \frac{4n}{\pi(n^2-5^2)}} \qquad \underline{\forall n = 2k}\,;$$

→ коэффициенты разложения отличны от нуля только для четных n;

т.к. $u_n(0) = 0$, имеем:

$$u_n(t) = \int_0^t \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)\right] f_n\,d\tau =$$

$$= f_n\cdot\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cdot\left(1-\exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right]\right)\,; \qquad \text{т.е.}$$

$$\boxed{u_{2k+1} = 0} \qquad \underline{u_{2k}(t) = \frac{4}{\pi}\,\frac{n}{n^2-5^2}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cdot\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right]\right\}}$$

тогда:

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\,\frac{2k}{(4k^2-5^2)}\cdot\left(\frac{l}{2\pi k}\right)^2\cdot\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 t\right]\right\}\sin\frac{2\pi k}{l}x}$$

2) ищем решение для $\hat{v}(x,t)$

$$\hat{v}_t = \hat{v}_{xx}\,;$$

→ [однородное уравнение с ненулевым начальным условием;]

$$\begin{cases} v(0,t) = 0\,; \\ v(l,t) = 0\,; \end{cases}$$

$$v(x,0) = 5\cdot\cos\frac{3\pi}{l}x - 2\cos\frac{2\pi}{l}x - 5\left(1-\frac{x}{l}\right);$$

метод разделения переменных!

ищем решение в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot t\right]\cdot A_n\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\,;$$

где $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l v(x,0)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$ → удовлетворяем начальным условиям;

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left\{ 5\cos\frac{3\pi}{l}x - 2\cos\frac{2\pi}{l}x - 5\left(1-\frac{x}{l}\right)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left\{ \underbrace{\frac{5l}{\pi^2 n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}_{0} - \frac{5l}{2\pi(n-3)}\cos\frac{\pi(n-3)}{l}x + \frac{l}{\pi(n-2)}\cos\frac{\pi(n-2)}{l}x - \right.$$

$$- \frac{5x}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \frac{5l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \frac{l}{\pi(n+2)}\cos\left(\frac{\pi(n+2)}{l}x\right) -$$

$$\left. - \frac{5l}{2\pi(n+3)}\cos\frac{\pi(n+3)}{l}x \right\}\Bigg|_0^l \quad ; \qquad \text{учитывая, что } \sin\pi n \equiv 0; \quad \cos\pi n = (-1)^n;$$

имеем:

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[\left(7\cdot(-1)^n - 2\right)n^4 + \left(63 - 38\cdot(-1)^n\right)n^2 - 180\right]$$

тогда полное решение для распределения температуры имеет вид:

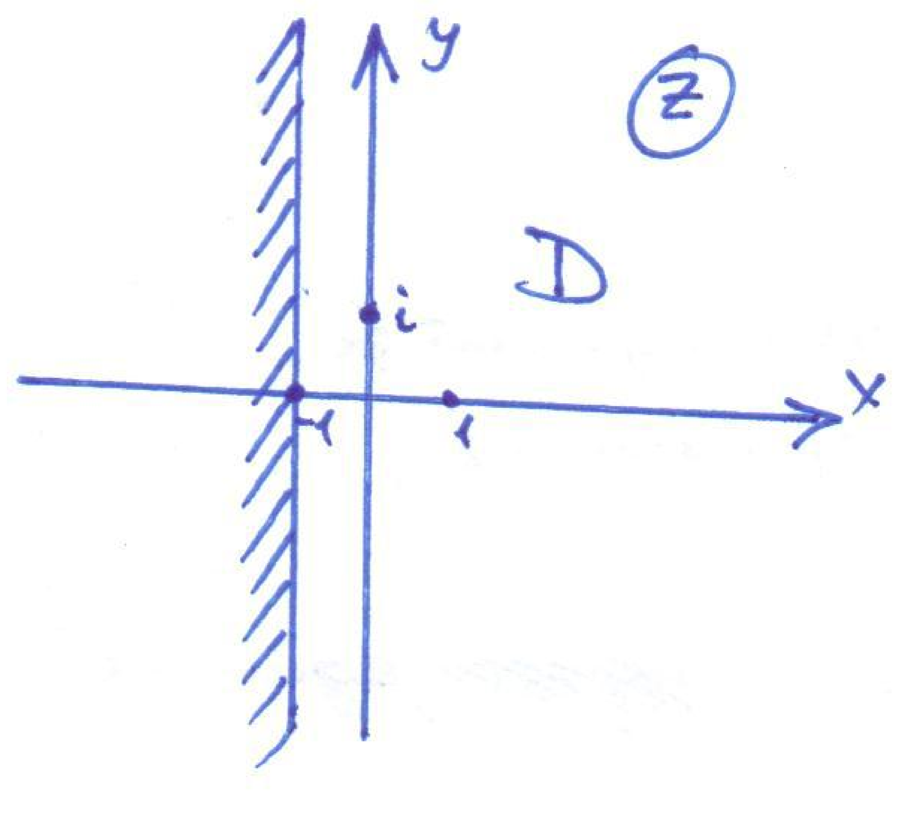
$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = {} & 5\cdot\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8k}{\pi(k^2-5^2)}\left(\frac{l}{2\pi k}\right)^2\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2 t\right]\right\}\sin\frac{2\pi k}{l}x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right]\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\frac{2}{\pi n}\left[\left(7\cdot(-1)^n-2\right)n^4 + \left(63-38\cdot(-1)^n\right)n^2 - 180\right], \end{aligned}}$$

8а Найти образ области D при отображении $W(z) = az+b$

D: $\operatorname{Re} z > -1$; $\quad a = -3+i; \quad b = 1.$

$W(z) = (-3+i)z + 1 \qquad D \to \tilde{D}$

1) построим исходную область в плоскости z:



Запишем алгебраически z в D:

$z = -1 + \rho e^{i\varphi}$; где $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

тогда при линейном преобразовании $W(z)$

$$W(z) = (-3+i)(-1+\rho e^{i\varphi}) + 1 =$$

$$= 3 - i + 1 + (-3+i)\rho e^{i\varphi} =$$

$$= 4 - i + (-3+i)\rho e^{i\varphi};$$

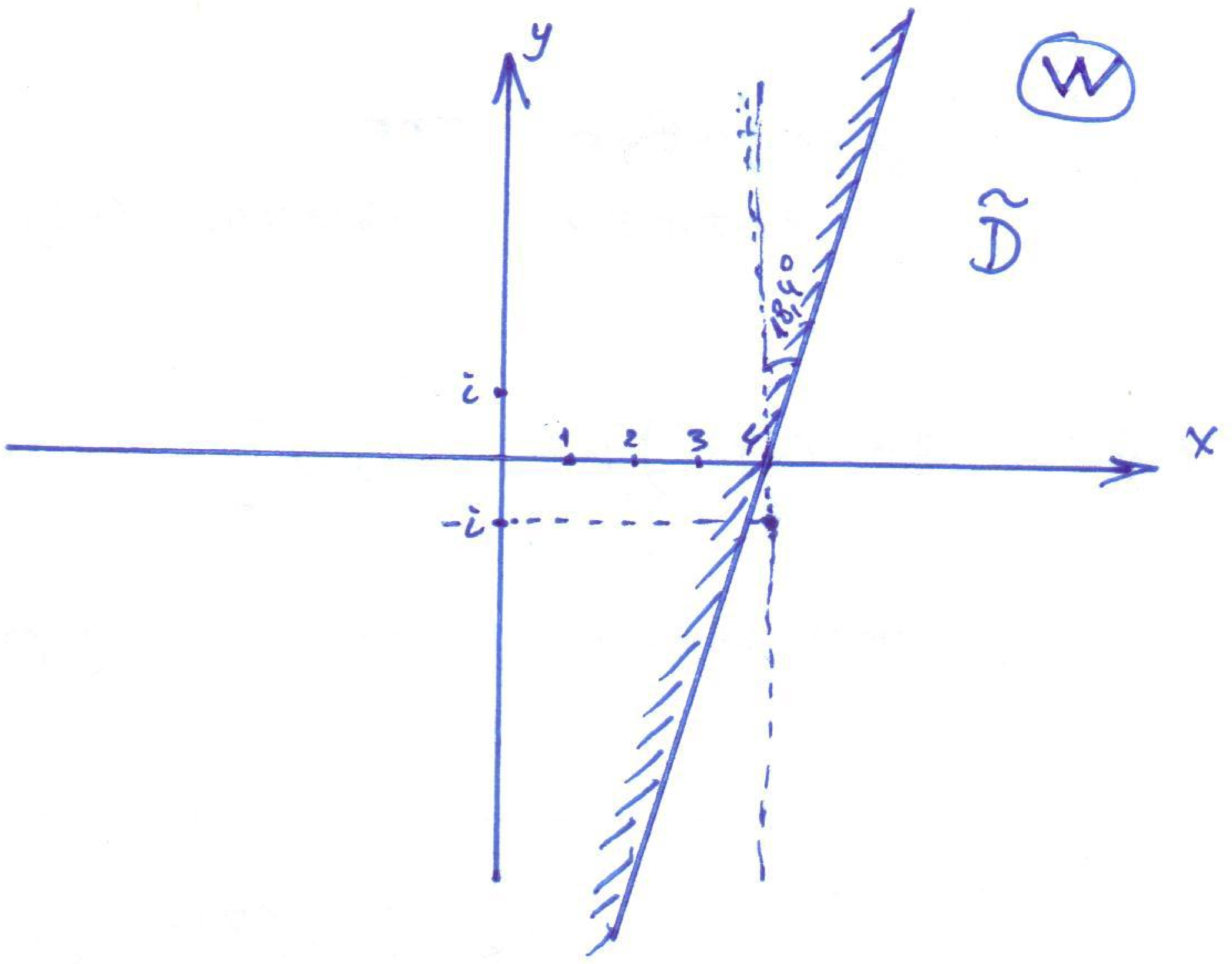
Запишем теперь число $(-3+i)$ в показательной форме:

$(-3+i) = \tilde{\rho} e^{i\tilde{\varphi}}$; $\tilde{\rho}^2 = 3^2 + 1^2 = 10$; $\rho = \sqrt{10}$;

$\operatorname{tg}\tilde{\varphi} = -\frac{1}{3}$; $\tilde{\varphi} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -18{,}4^\circ$

тогда:

$$W(z) = \underbrace{4-i}_{\text{перенос}} + \underbrace{\sqrt{10}}_{\text{растяжение}}\rho \exp[i\varphi + \underbrace{i\tilde{\varphi}}_{\text{поворот вправо на } 18{,}4^\circ}], \quad \text{где } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



→ линейное преобразование
$W(z) = (3+i)z + 1$
сдвигает область D
вправо на 5 и
поворачивает на угол
$\tilde{\varphi} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx -18{,}4^\circ$

(8б) Найти дробно-линейную функцию, конформно отображающую область D на область G и удовлетворяющую заданным условиям:

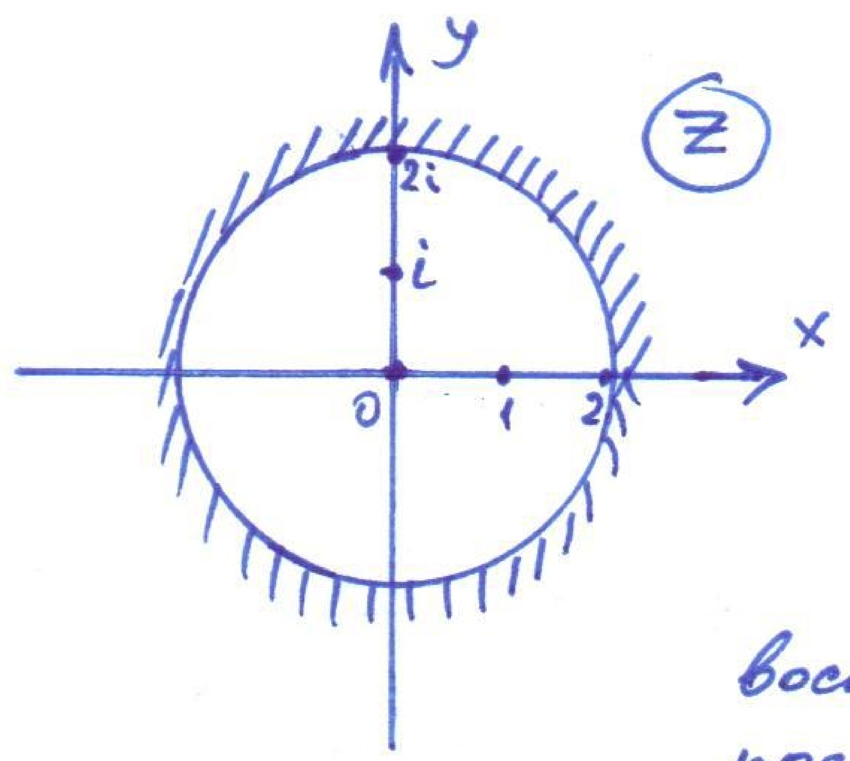
$w(i) = 2$; $w(2i) = 0$,

D: $|z| < 2$

→ внутренность круга радиуса $R = 2$

G: $\operatorname{Im} w > 1$

→ полуплоскость



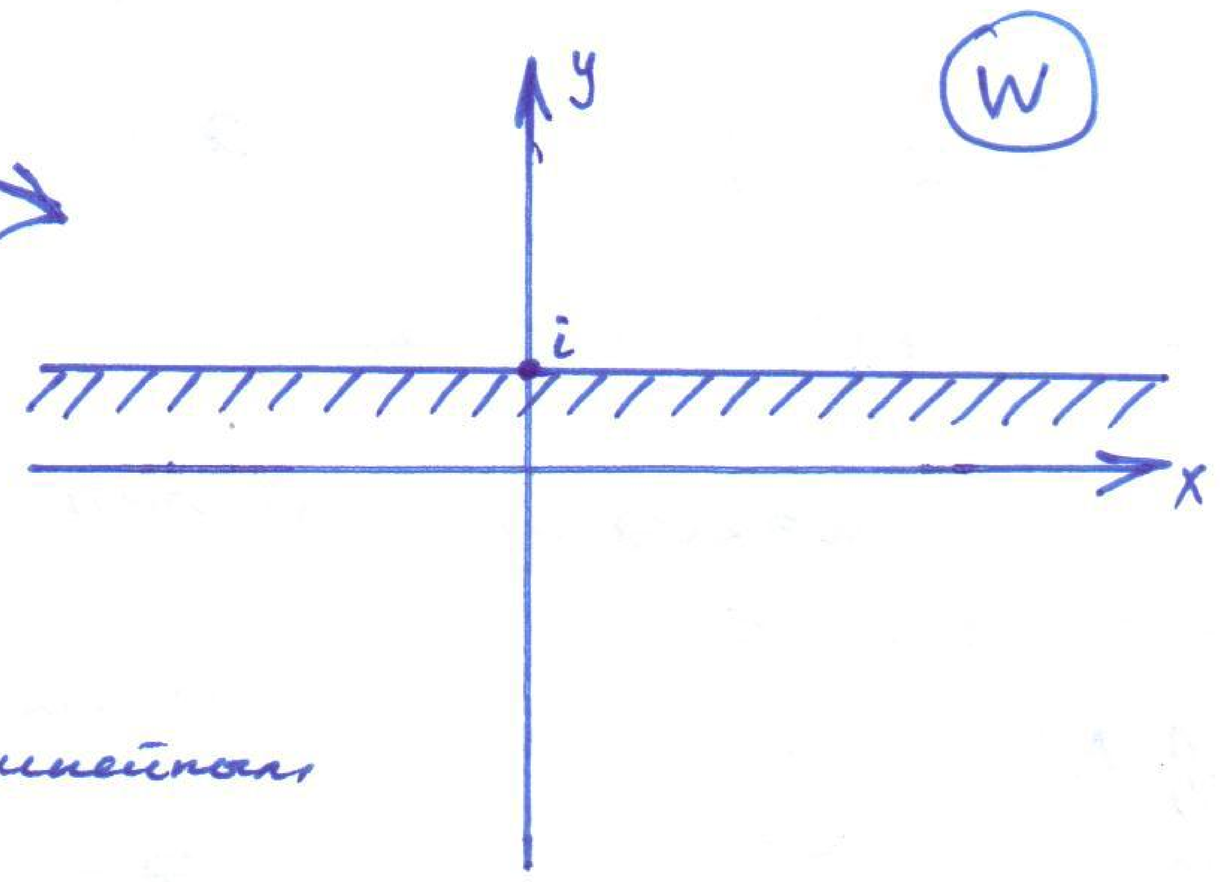
W(z)

↓

нужно найти аналитическую функцию;

↓

воспользуемся дробно-линейным преобразованием;



пусть $W(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d → коэффициенты, которые следует определить;

при этом $ad - bc \neq 0$.

один из коэффициентов можно положить равным единице:

пусть $c = 1$;

должна выполнятся следующие преобразование:

$i \to 2$; $2i \to 0$

и, например, $2 \to \infty$ (чтобы сделать из окружности плоскость)

$$w(i) = \frac{a\cdot i + b}{i + d} = 2; \qquad w(2i) = \frac{a\cdot 2i + b}{2i + d} = 0; \qquad b = -a\cdot 2i;$$

$$2 + d = 0$$

$$w(2) \Rightarrow \infty \quad \Rightarrow \qquad d = -2;$$

пусть $a = 2$; тогда $w(0) = \frac{b}{d} = \frac{-a\cdot 2i}{-2} = ai = 2i$

тогда $b = -4i$

внутренность круга $(z=0)$ переходит в верхнюю полуплоскость (в частности, $w = 2i$)

$$w(z) = \frac{2z - 4i}{z - 2}; \qquad \boxed{w(z) = 2\,\frac{z - 2i}{z - 2}}$$

→ конформно отображает область D в область G;