

Задача №1

Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение

Для вычисления определителя приведем матрицу к треугольному виду.

После этого определитель будет равен произведению элементов главной диагонали.

Вычтем из строки 2 строку 1 умноженную на $(a_{2,1}/a_{1,1})=2$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 3 строку 1 умноженную на $(a_{3,1}/a_{1,1})=3$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 & 12 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 2 & -10 & -14 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 4 строку 1 умноженную на $(a_{4,1}/a_{1,1})=4$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 2 & -10 & -14 \\ 0 & 11 & -10 & -17 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 3 строку 2 умноженную на $(a_{3,2}/a_{2,2}) = \frac{2}{5}$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 11 & -10 & -17 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 4 строку 2 умноженную на $(a_{4,2}/a_{2,2}) = \frac{11}{5}$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & 11 & -22 & -11 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 4 строку 3 умноженную на $(a_{4,3}/a_{3,3}) = -2$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 & 24 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix}$$

Вычисляем определитель :

$$\det[A] = 1 * 5 * -6 * -30 = 900$$

Задача №2

Даны A, B, C . Найти $D=AB^T - C$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

Для начала найдем B^T . Очевидно, что

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдем теперь произведение матриц

$$R = AB^T$$

Вычислим элементы матрицы $|R|$:

$$r_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}$$

$$r_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}$$

$$r_{1,3} = a_{1,1}b_{1,3} + a_{1,2}b_{2,3}$$

$$r_{2,1} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}$$

$$r_{2,2} = a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}$$

$$r_{2,3} = a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3}$$

$$r_{3,1} = a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1}$$

$$r_{3,2} = a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2}$$

$$r_{3,3} = a_{3,1}b_{1,3} + a_{3,2}b_{2,3}$$

$$r_{1,1} = 5 * 3 + 1 * 1 = 15 + 1 = 16$$

$$r_{1,2} = 5 * -2 + 1 * -1 = -10 + -1 = -11$$

$$r_{1,3} = 5 * 3 + 1 * -2 = 15 + -2 = 13$$

$$r_{2,1} = 7 * 3 + -4 * 1 = 21 + -4 = 17$$

$$r_{2,2} = 7 * -2 + -4 * -1 = -14 + 4 = -10$$

$$r_{2,3} = 7 * 3 + -4 * -2 = 21 + 8 = 29$$

$$r_{3,1} = 3 * 3 + -2 * 1 = 9 + -2 = 7$$

$$r_{3,2} = 3 * -2 + -2 * -1 = -6 + 2 = -4$$

$$r_{3,3} = 3 * 3 + -2 * -2 = 9 + 4 = 13$$

Результирующая матрица $|R|$:

$$\begin{pmatrix} 16 & -11 & 13 \\ 17 & -10 & 29 \\ 7 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

Осталось только выполнить вычитание. Отнимая поэлементно, имеем:

$$D=AB^T-C=R-C=\begin{pmatrix} 16 & -11 & 13 \\ 17 & -10 & 29 \\ 7 & -4 & 13 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -13 & 14 \\ 18 & -17 & 25 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача №3

Составить обратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

Припишем справа к исходной матрице единичную. В полученной расширенной матрице, левая часть есть исходная матрица, а правая единичная. Затем, производя элементарные операции над строками расширенной матрицы, будем приводить левую часть расширенной матрицы к единичной. По достижению указанной цели правая часть расширенной матрицы будет содержать матрицу обратную к исходной

Сформируем расширенную матрицу :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 2 строку 1 умноженную на $a_{2,1}=-3$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -3 & -6 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 3 строку 1 умноженную на $a_{3,1}=1$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Разделим строку 2 на $a_{2,2}=7$

Получим матрицу :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 3 строку 2 умноженную на $a_{3,2}=2$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} & \frac{-13}{7} & \frac{-2}{7} & 1 \end{array} \right|$$

Разделим строку 3 на $a_{3,3}=\frac{30}{7}$

Получим матрицу :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{30} & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 2 строку 3 умноженную на $a_{2,3}=\frac{-1}{7}$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{13}{210} & \frac{1}{105} & \frac{-1}{30} \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{30} & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 30 & 15 & 30 \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 1 строку 3 умноженную на $a_{1,3}=-1$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ \frac{13}{30} & \frac{1}{15} & \frac{-7}{30} \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{ccc} \frac{17}{30} & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ \frac{-13}{30} & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 1 строку 2 умноженную на $a_{1,2}=2$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ \frac{11}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{ccc} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ \frac{-13}{30} & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} \end{array} \right|$$

В последней расширенной матрице, левая часть есть единичная матрица, а правая обратная к исходной.

Ответ :

$$[A]^{-1} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ \frac{-13}{30} & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} \end{array} \right|$$

Задача №4

Найти решения системы уравнений с помощью формул Крамера

$$36) \begin{cases} x-y+z=4 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=6 \end{cases}$$

Решение

Для решения системы уравнений методом Крамера сперва найдем определитель матрицы коэффициентов:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Раскрывая по первой строке не трудно подсчитать, что $\det A=4$. Для нахождения значения переменных заменим соответствующий столбик матрицы столбиком правой части и найдем определители.

$$X = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Раскрывая по последнему столбцу, найдем значение определителя
 $\det X=12$

Согласно формулам Крамера искомая переменная x имеет значение

$$x = \frac{\det X}{\det A} = \frac{12}{4} = 3$$

Аналогично отыщем переменные y и z .

$$Y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Разлагая по первому столбику, вычислим $\det Y=16$;

$$y = \frac{\det Y}{\det A} = \frac{16}{4} = 4$$

$$Z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Разлагая по первому столбцу, имеем $\det Z=20$.

$$z = \frac{\det Z}{\det A} = \frac{20}{4} = 5$$

Таким образом система имеет решения (3; 4; 5)

Задача №5

Найти решения системы уравнений матричным способом

$$\begin{cases} x-3y+3z=-1 \\ x+9y+6z=3 \\ x+3y+4z=1 \end{cases}$$

Решение

Сформируем расширенную матрицу :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right|$$

Применяя к расширенной матрице, последовательность элементарных операций стремимся, чтобы каждая строка, кроме, быть может, первой, начиналась с нулей, и число нулей до первого ненулевого элемента в каждой следующей строке было больше, чем в предыдущей.

Вычтем из строки 2 строку 1 умноженную на $a_{2,1}=1$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 12 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right|$$

Вычтем из строки 3 строку 1 умноженную на $a_{3,1}=1$

Вычитаемая строка :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right|$$

Модифицированная матрица :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 12 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

Разделим строку 2 на $a_{2,2}=12$

Получим матрицу :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 3 строку 2 умноженную на $a_{3,2}=6$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

Разделим строку 3 на $a_{3,3}=-\frac{1}{2}$

Получим матрицу :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 2 строку 3 умноженную на $a_{2,3}=\frac{1}{4}$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 1 строку 3 умноженную на $a_{1,3}=3$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычтем из строки 1 строку 2 умноженную на $a_{1,2}=-3$

Вычитаемая строка :

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Модифицированная матрица :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Выпишем систему уравнений по последней расширенной матрице:

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_3 = 2$$

Заданная система уравнений имеет единственное решение:

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_3 = 2$$