Метод комплексного потенциала

Метод комплексного потенциала: мотивация

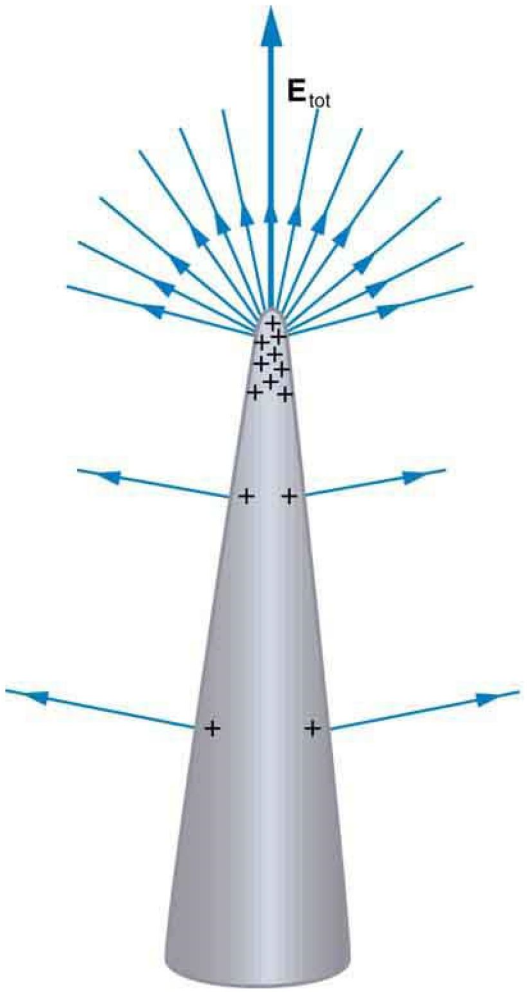
Высокая напряженность

⇓

риск пробоя

⇓

задача о нахождении
формы электродов



Метод комплексного потенциала: «немного» теории

Стационарные плоско-параллельные процессы в изотропных и однородных средах

Уравнения движения $V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$\Rightarrow \quad \psi$, такая что:

Уравнение неразрывности $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad W(z) = \varphi + i\psi$$

Плоский конденсатор

- Комплексный потенциал $W = u + iv$
- Ищем в виде $W = -\alpha i z$

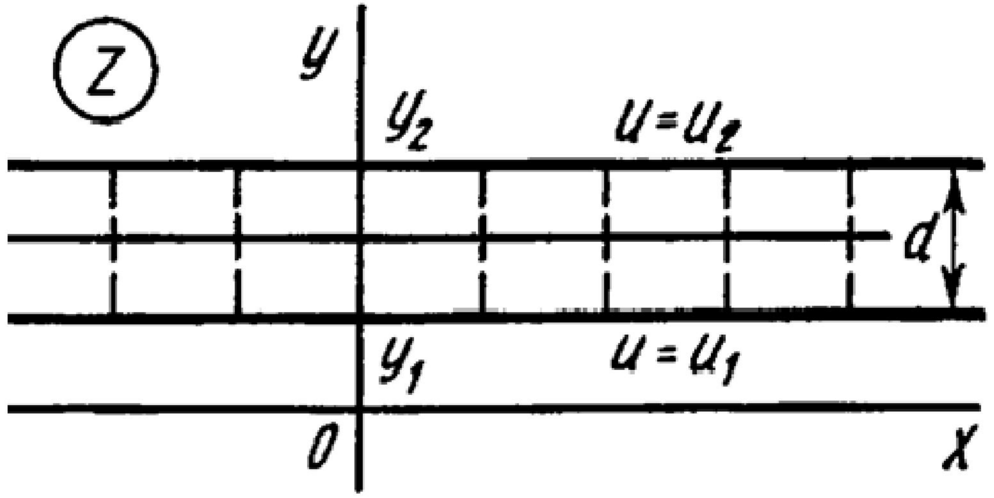
$$u_1 = \alpha y_1, \quad u_2 = \alpha y_2$$

$$\alpha = (u_2 - u_1)/(y_2 - y_1) = u_0/d$$

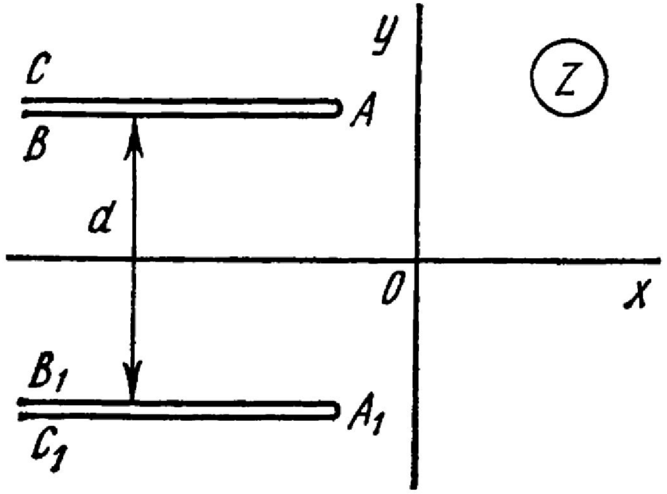
$$W = i u_0 z/d.$$

$$u = \frac{u_0}{d} y = \text{const}, \qquad v = -\frac{u_0}{d} x = \text{const}$$

эквипотенциали силовые линии



Краевые эффекты



$$-\pi < \operatorname{Im}\omega < \pi \text{ плоскости } (\omega) \qquad z = \frac{d}{2\pi}(\omega + e^{\omega})$$

$$z = x + iy \qquad x = \frac{d}{2\pi}(\xi + e^{\xi}\cos\eta), \quad y = \frac{d}{2\pi}(\eta + e^{\xi}\sin\eta)$$
$$\omega = \xi + i\eta$$

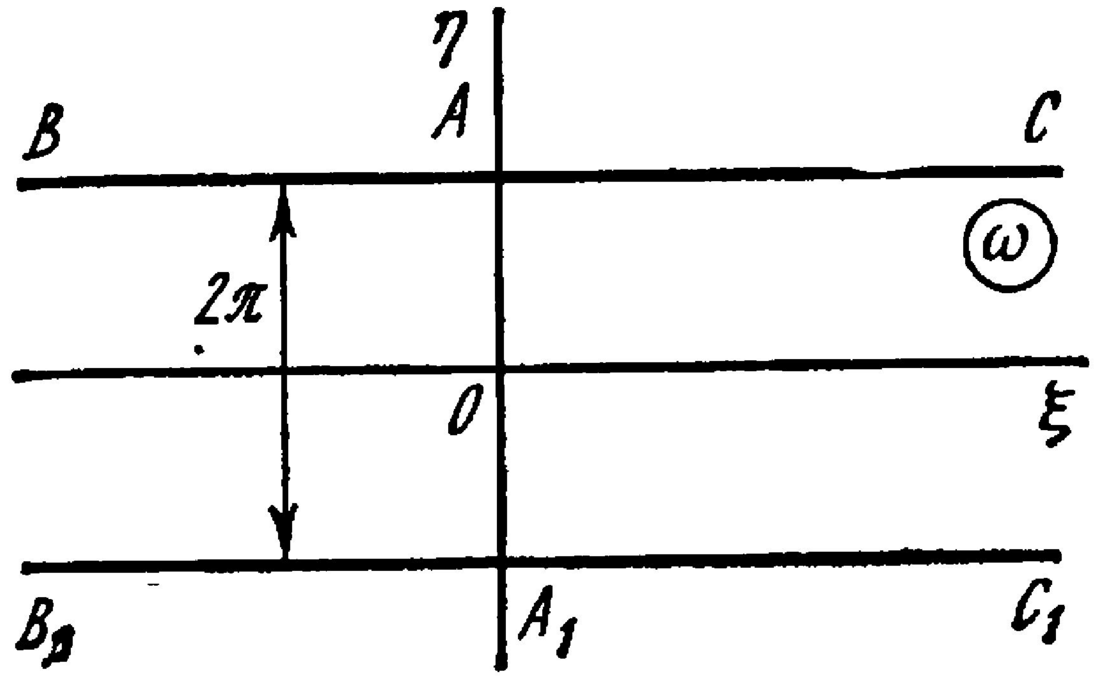
для $\eta = \pm\pi$ имеем $x = \frac{d}{2\pi}(\xi - e^{\xi})$ $\quad y = \pm\frac{d}{2}$

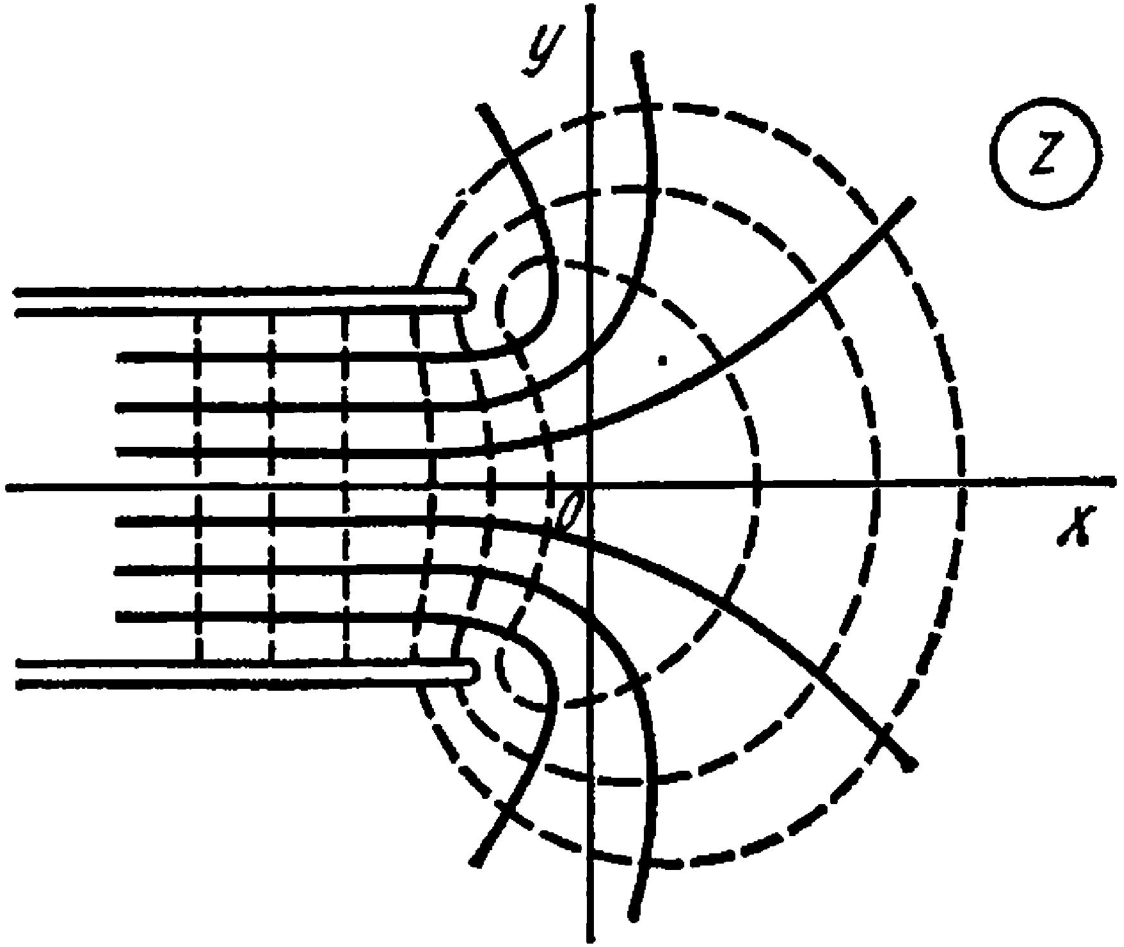
Комплексный потенциал в плоскости (ω) $\quad W = -i\frac{u_0}{2\pi}\omega$

$$z = \frac{d}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{u_0}Wi + \exp\frac{2\pi i}{u_0}W\right)$$

$$x = \frac{d}{2\pi}\left[-\frac{2\pi}{u_0}v + \cos\left(\frac{2\pi}{u_0}u\right)\exp\left(-\frac{2\pi}{u_0}v\right)\right]$$
$$y = \frac{d}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{u_0}u + \sin\left(\frac{2\pi}{u_0}u\right)\exp\left(-\frac{2\pi}{u_0}v\right)\right]$$

Краевые эффекты





Электрод Роговского

$$\mathbf{E}=\frac{iu_0}{d}\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{2\pi}{u_0}i\overline{W}\right)}$$

при $x\to-\infty$, $v\to\infty$ $\mathbf{E}\approx iu_0/d$

при $z\to\pm id/(2\pi)-d/(2\pi)$

$\overline{W}\to\pm u_0/2$ $\mathbf{E}$ неограниченно возрастает

Вычислим напряженность поля $|\mathbf{E}|$ вдоль $v=\mathrm{const}$

$$|\mathbf{E}|=\frac{|\mathrm{d}W|}{|\mathrm{d}z|}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$$

$$|\mathbf{E}|=\frac{u_0}{d}\times\frac{1}{\sqrt{1+2\exp\left(-\frac{2\pi}{u_0}v\right)\cos\left(\frac{2\pi}{u_0}u\right)+\exp\left(-\frac{4\pi}{u_0}v\right)}}$$

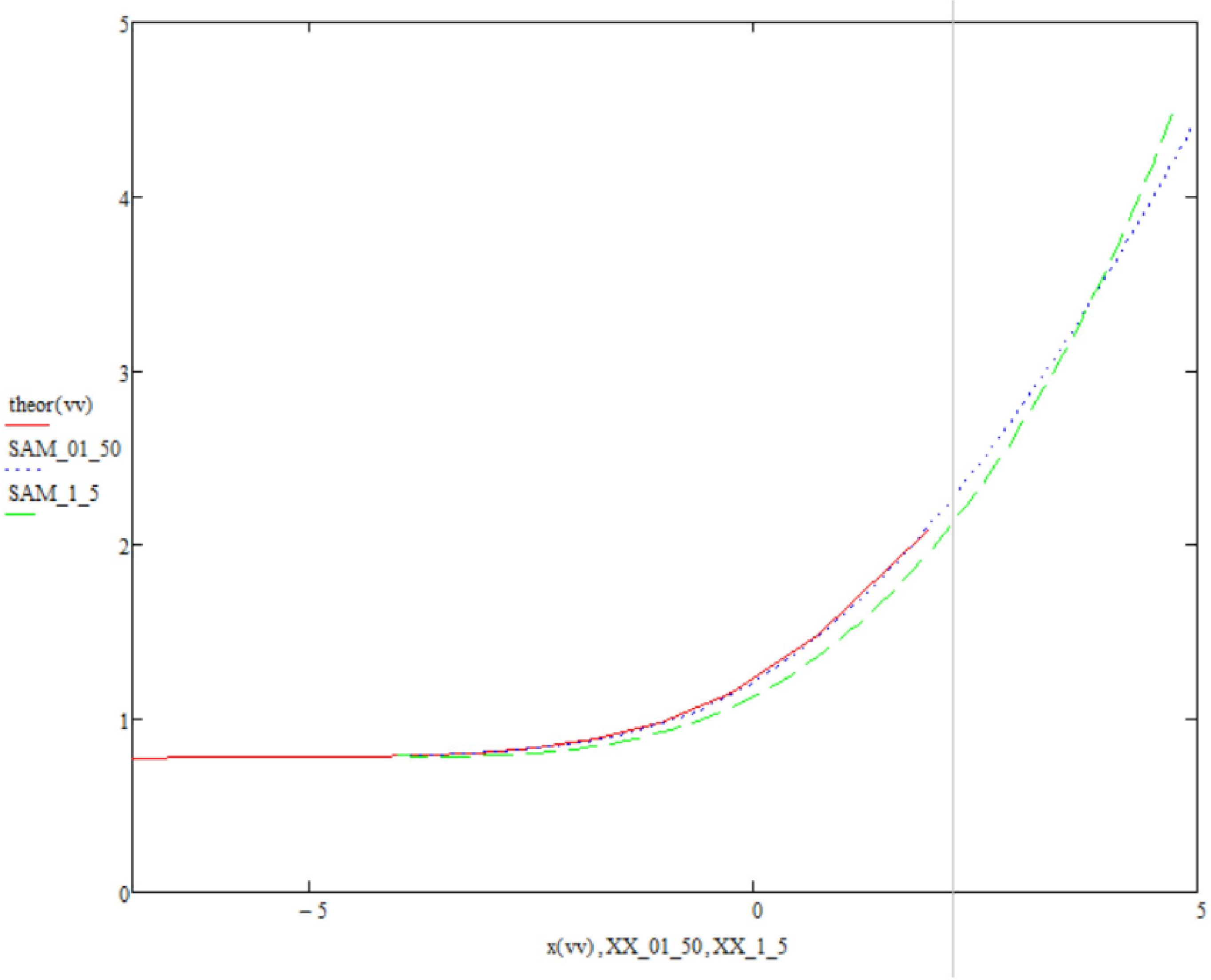
Приравнивая нулю производную по v найдем максимум $|\mathbf{E}|$

необходимое условие экстремума: $\cos\frac{2\pi}{u_0}u+\exp\left(-\frac{2\pi}{u_0}v\right)=0$

Для $u=\pm u_0/4$ максимум $|\mathbf{E}|=\frac{u_0}{d}\frac{1}{\sqrt{1+\exp\left(-\frac{4\pi}{u_0}v\right)}}$

достигается при $v=+\infty$, что соответствует $x=-\infty$ т. е. на левом крае конденсатора. Если построить конденсатор, пластины которого имеют форму линий равного потенциала $u=\pm u_0/4$, то в этом случае напряженность поля уменьшается по мере приближения к краям, а не возрастает неограниченно, как для плоского конденсатора. Конденсаторы с пластинами такой формы называются конденсаторами Роговского.

Расчёт в SAM



theor – теоретическая кривая

SAM_01_50 – результат моделирования в программе SAM при ширине электрода 0,1 мм и длине 50 мм

SAM_1_5 – результат моделирования в программе SAM при ширине электрода 1 мм и длине 5 мм