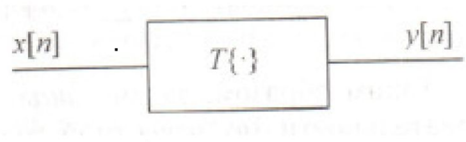
1. По заданым разностным уравнениям цифровых цепей проверьте их физическую реализуемость (каузальность), стационарность, линейность и устойчивость.

Разностное уравнение цепи:

$y[n]=2x[n+1]$



Оператор цепи.

Линейность

Если оператор цепи (математическое описание) подчиняются принципу суперпозиции, то такая цепь линейна.

$T\{\alpha x1[n]+\beta x2[n]\}=2(\alpha x1[n+1]+\beta x2[n+1])=2\alpha x1[n+1]+2\beta x2[n+1]=$

$\alpha T\{x1[n]\}+\beta T\{x2[n]\}$

Цепь линейна.

Стационарность

Цепи для которых вид оператора T{ } не зависит от сдвига k, поэтому изменение реакции такой цепи на сдвинутую последовательность при разных сдвигах k выражается лишь в сдвиге отклика. Такие цепи называются стационарными.

$y[n]=2x[n+1]$

$y[n-k]=2x[n-k+1]$

$y[m]=2x[m+1]$

Вид оператора T{ } не зависит от сдвига k, следовательное цепь стационарна.

Устойчивость

Если при ограниченном входном воздействии мы имеем ограниченное выходное воздействие, то цепь называется устойчивой.

Пусть входное воздействие ограничено константой $|x[n]| \le K$.

Тогда $|y[n]| \le 2K$. Следовательно, цепь устойчива.

Реализуемость (каузальность)

Свойство каузальности - отклик цепи не может зависить от "будущих" значений входной последовательности.

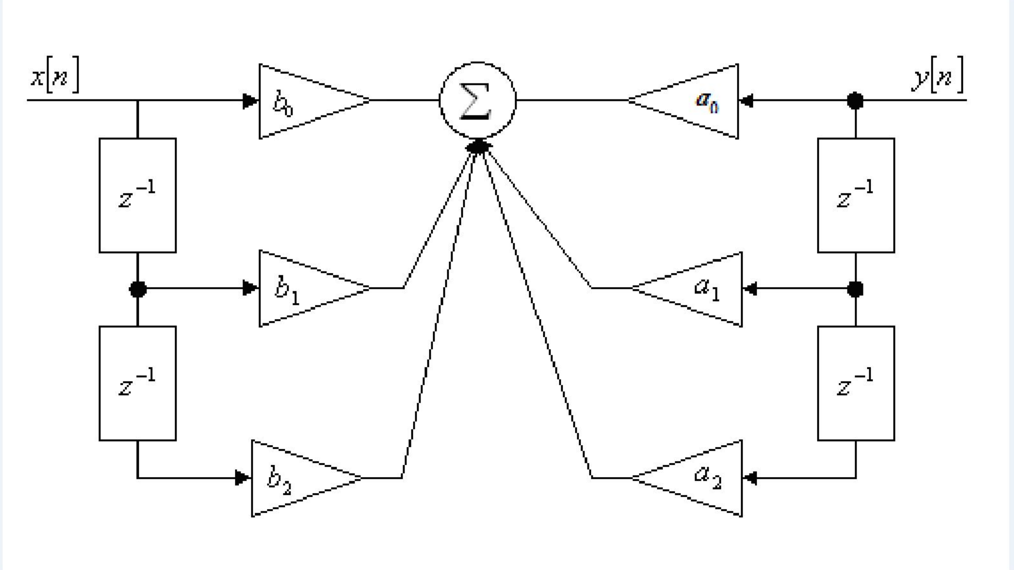
$y[n]=2x[n+1]$ следовательно, отклик цепи зависит от будущих значений входящей последовательности, поэтому цепь некаузальна.

2. По разностному уравнению

$a_2 \cdot y(n-2) + a_1 \cdot y(n-1) + a_0 \cdot y(n) = b_2 \cdot x(n-2) + b_1 \cdot x(n-1) + b_0 \cdot x(n)$,где

$a_2 := 5.6 \quad a_1 := 6 \quad a_0 := 5 \qquad b_2 := 2 \quad b_1 := 4 \quad b_0 := 9$

Составить структурную схему цепи:



Построим нуль-полюсную диаграмму, обозначте область сходимости z-преобразования ИХ :

Найдем нули и полюсы передаточной функции.

$$j := \sqrt{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_2 \cdot z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0}{a_2 \cdot z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0} = \frac{\frac{b_2}{a_0} \cdot z^{-2} + \frac{b_1}{a_0} z^{-1} + \frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} \cdot z^{-2} + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + 1}$$

Найдем нули ПФ

$$\frac{b_2}{a_0} \cdot z^{-2} + \frac{b_1}{a_0} z^{-1} + \frac{b_0}{a_0} = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{14} \cdot i}{9} \\ -\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{14} \cdot i}{9} \end{pmatrix}$$

$$c1 := -\frac{2}{9} - \left(\frac{\sqrt{14}}{9}\right) \cdot i$$

$$c2 := -\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \cdot \sqrt{14} \cdot i$$

Найдем полюсы ПФ

$$\frac{a_2}{a_0} \cdot z^{-2} + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + 1 = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -0.6 + 0.87177978870813471045i \\ -0.6 - 0.87177978870813471045i \end{pmatrix}$$

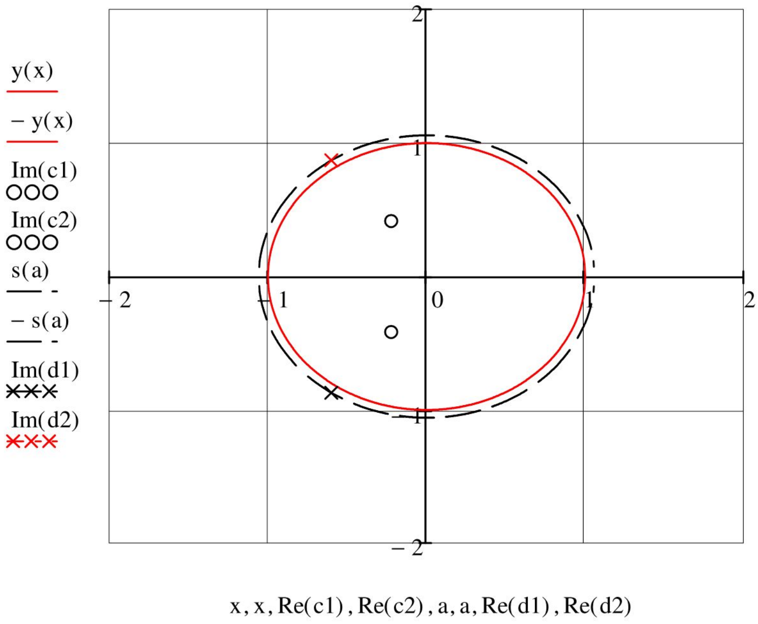
$$d1 := -0.6 - 0.87177978870813471045i$$

$$d2 := -0.6 + 0.87177978870813471045i$$

Построим нуль-полюсную диаграмму

$$y(x) := \sqrt{1 - x^2} \qquad s(a) := |d1| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{|d1|}\right)^2}$$

Нуль-полюсная диаграмма



По нуль полюсной диаграмме видно что цепь не устойчива, так как область сходимости не включает единичную окружность.

Определите импульсную характеристику устойчивой дискретной цепи:

$b_0 := 9 \quad b_1 := 4 \quad b_2 := 2 \qquad a_0 := 5 \quad a_1 := 6 \quad a_2 := 5.6$

$$H(z) := \frac{\dfrac{b_2}{a_0} + \dfrac{b_1}{a_0}z + \dfrac{b_0}{a_0}\cdot z^2}{\dfrac{a_2}{a_0} + \dfrac{a_1}{a_0}z + z^2}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} := \frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1}{a_0}z + z^2 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -0.6 - 0.87177978870813471045i \\ -0.6 + 0.87177978870813471045i \end{pmatrix}$$

$$\frac{\dfrac{b_2}{a_0} + \dfrac{b_1}{a_0}z + \dfrac{b_0}{a_0}\cdot z^2}{\dfrac{a_2}{a_0} + \dfrac{a_1}{a_0}z + z^2} = \frac{\dfrac{b_2}{a_0} + \dfrac{b_1}{a_0}z + \dfrac{b_0}{a_0}\cdot z^2}{(z - d_1)\cdot(z - d_2)} = \frac{\dfrac{b_2}{a_0} + \dfrac{b_1}{a_0}z + \dfrac{b_0}{a_0}\cdot z^2}{(d_1 - z)\cdot(d_2 - z)} = \frac{\dfrac{1}{d_1\cdot d_2}\cdot\left(\dfrac{b_2}{a_0} + \dfrac{b_1}{a_0}z + \dfrac{b_0}{a_0}\cdot z^2\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z\right)\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{b_0}{a_0\cdot d_1\cdot d_2}\cdot z^2 + \dfrac{b_1}{a_0\cdot d_1\cdot d_2}\cdot z + \dfrac{b_2}{a_0\cdot d_1\cdot d_2}}{\left(1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z\right)\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z\right)}$$

Выделим целую часть и представми в виде суммы

$$A + \frac{B}{1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z} + \frac{C}{1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z} = \frac{A\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z\right)\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z\right) + B\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z\right) + C\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z\right)\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{A}{d_1\cdot d_2}\cdot z^2 + \left[-A\cdot\left(\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2}\right) - \dfrac{B}{d_2} - \dfrac{C}{d_1}\right]\cdot z + A + B + C}{\left(1 - \dfrac{1}{d_1}\cdot z\right)\cdot\left(1 - \dfrac{1}{d_2}\cdot z\right)}$$

Given

$$\frac{b_0}{a_0 \cdot d_1 \cdot d_2} = \frac{A}{d_1 \cdot d_2}$$

$$\frac{b_1}{a_0 \cdot d_1 \cdot d_2} = -A \cdot \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) - \frac{B}{d_2} - \frac{C}{d_1}$$

$$\frac{b_2}{a_0 \cdot d_1 \cdot d_2} = A + B + C$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(A, B, C) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.72142857142857142857 + 0.28349229971147989644i \\ -0.72142857142857142857 - 0.28349229971147989644i \end{pmatrix}$$

Тогда выражение для импульсной характеристики

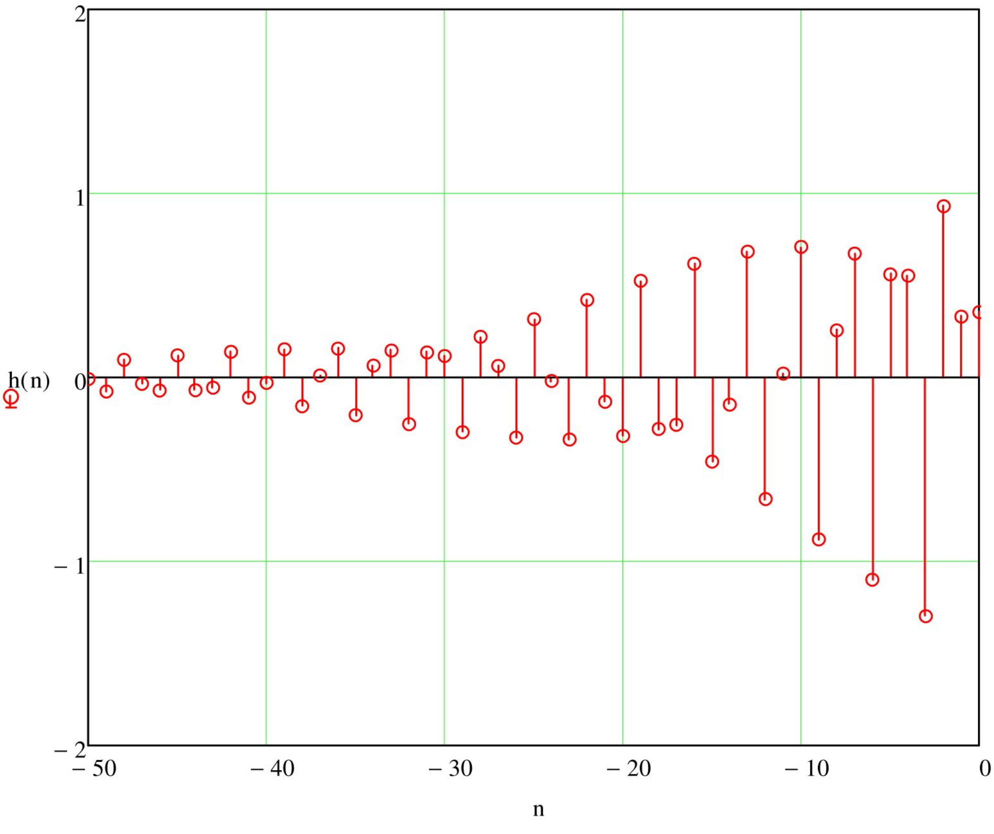
$$\delta(f) := \begin{vmatrix} 1 & \text{if } f = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$h(n) := A \cdot \delta(n) + B \cdot (d_1)^n + C \cdot (d_2)^n$$

Построим график импульсной характеристики:

$n := -50, -49 .. 0$

Импульсная характеристика



Расчитайте АЧХ и ФЧХ цепи, постройте графики:

$$H(w) := \frac{b_2\cdot\left(e^{j\cdot w}\right)^{-2} + b_1\left(e^{j\cdot w}\right)^{-1} + b_0}{a_2\cdot\left(e^{j\cdot w}\right)^{-2} + a_1\left(e^{j\cdot w}\right)^{-1} + a_0}$$