1. плотность распределения X : $f_m(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2}}{\Gamma(m/2)}$ $\quad x \geq 0$

y : $f_n(y)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \dfrac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}}{\Gamma(n/2)}$ $\quad y \geq 0$

пусть $z=\dfrac{nx}{my}$

найдем вероятность того, что $z \leq \xi$:

$$P(z \leq \xi)=\int_0^\infty f_m(x)\,dx \cdot P\left(y \geq \frac{nx}{m\xi}\right)$$

$\displaystyle\int_{\frac{nx}{m\xi}}^{\infty} f_n(y)\,dy$ - вероятность того, что при данном X, $z=\dfrac{nx}{my}$ будет меньше ξ: $\dfrac{nx}{my} \leq \xi$, т.е. $y \geq \dfrac{nx}{m\xi}$

дифференцируя $P(z \leq \xi)$ находим плотность вероятности z:

$$g(\xi)=\frac{d}{d\xi}\int_0^\infty f_m(x)\,dx \cdot \int_{\frac{nx}{m\xi}}^{\infty} f_n(y)\,dy = \int_0^\infty f_m(x)\,dx \cdot f_n\left(\frac{nx}{m\xi}\right)\cdot\frac{nx}{m\xi^2} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{nx}{m\xi}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{nx}{m\xi}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{nx}{m\xi^2}\,dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n}{m\xi}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{m\xi^2} \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}\left(1+\frac{n}{m\xi}\right)}\,dx}_{\text{обозначим через } I}$$

$$I = \int_0^\infty x^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}\left(1+\frac{n}{m\xi}\right)}\,dx = \int_0^\infty x^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-x}\,dx \cdot \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{m\xi}\right)\right]^{-\frac{(m+n)}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2m\xi}{n+m\xi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)=\int_0^\infty x^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-x}\,dx$$ - гамма ф-ия Эйлера

поэтому
$$g(\xi) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{m\xi}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \left(\frac{2m\xi}{n+m\xi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\xi} \cdot \frac{(m\xi)^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}}{(m\xi+n)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}$$ (распределение Фишера)

где $B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$ $\quad$ ч.т.д.