

Задача 1

Для балки, изображенной на рис.1.1, требуется:

- 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
 - 2) построить эюры Q и M ;
 - 3) построить эюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.
- Дано: $\alpha = 0,3$; $\beta = 1,0$.

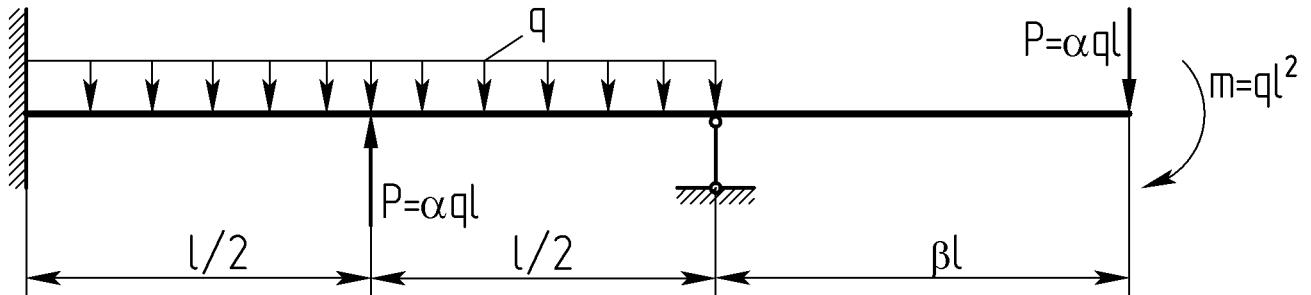


Рис.1.1

Решение

1. Составим уравнение статики в виде суммы моментов всех приложенных к балке сил (рис.1.2) относительно правой опоры:

$$\begin{aligned} \sum m_A(F_i) &= -M_0 + Q_0 \cdot l - P \cdot 0,5l + q \cdot \frac{l^2}{2} - P \cdot l - m = 0; \\ -M_0 + Q_0 \cdot l &= P \cdot 1,5l - q \cdot \frac{l^2}{2} + m = 0,3ql \cdot 1,5l - q \cdot \frac{l^2}{2} + ql^2; \\ -M_0 + Q_0 \cdot l &= 0,95ql^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Составим уравнение метода начальных параметров, выражающее ту мысль, что прогиб на правой опоре равен нулю:

$$EIy_A = EIy_0 + \frac{EI\theta_0 \cdot l}{1!} + \frac{M_0 \cdot l^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot l^3}{3!} + \frac{P \cdot (0,5l)^3}{3!} - \frac{q \cdot l^4}{4!}.$$

Так как $y_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ (прогиб и угол поворота в заделке равны нулю), $y_A = 0$, то получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{M_0 \cdot l^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot l^3}{3!} + \frac{P \cdot (0,5l)^3}{3!} - \frac{q \cdot l^4}{4!}; \\ \frac{M_0 \cdot l^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot l^3}{3!} &= -\frac{P \cdot (0,5l)^3}{3!} + \frac{q \cdot l^4}{4!}; \\ \frac{M_0 \cdot l^2}{2} - \frac{Q_0 \cdot l^3}{6} &= -\frac{0,3ql \cdot (0,5l)^3}{6} + \frac{q \cdot l^4}{24}; \\ 3M_0 - Q_0 \cdot l &= 0,2125ql^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим:

$$M_0 = 0,58125ql^2; \quad Q_0 = 1,53125ql.$$

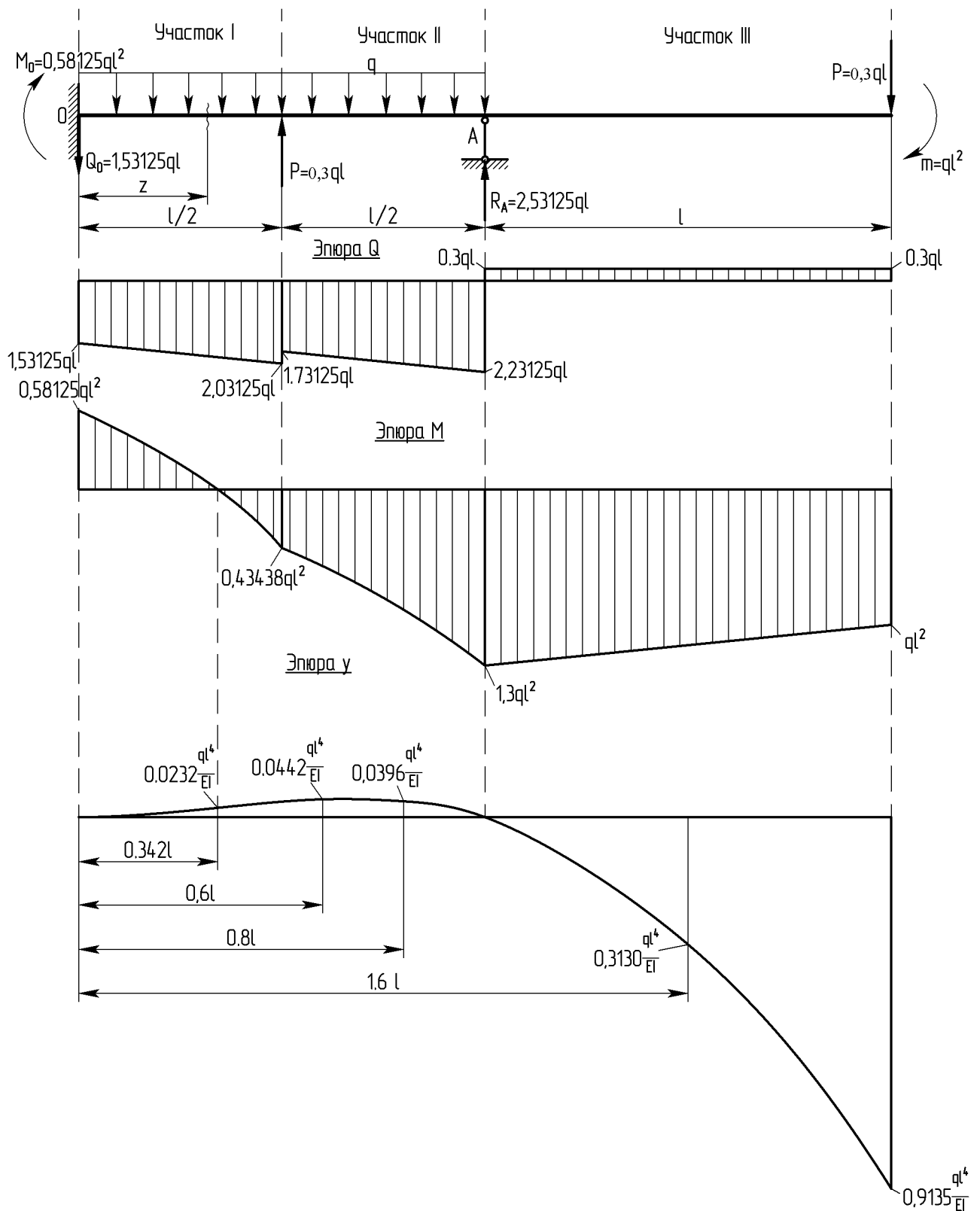


Рис.1.2

2. Определим реакцию правой опоры:

$$\sum m_0(F_i) = -M_0 + P \cdot 0,5l - q \cdot \frac{l^2}{2} + R_A \cdot l - P \cdot 2l - m = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{l} (M_0 + P \cdot 1,5l + 0,5ql^2 + m) = \frac{1}{l} (0,58125ql^2 + 0,3ql \cdot 1,5l + 0,5ql^2 + ql^2);$$

$$R_A = 2,53125ql^2.$$

Разбиваем балку на три участка (рис.1.2) и для каждого из участков напишем выражения для Q и M .

Участок I: $0 \leq z \leq 0,5l$

$$Q = -Q_0 - q \cdot z;$$

$$M = M_0 - Q_0 \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2};$$

при $z = 0$ $Q = -1,53125ql$, $M = 0,58125ql^2$;

при $z = 0,5l$ $Q = -2,03125ql$, $M = -0,43438ql^2$.

Определим точку, в которой изгибающий момент на участке I будет равен нулю:

$$0 = M_0 - Q_0 \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2};$$

$$0,58125ql^2 - 1,53125ql \cdot z - 0,5qz^2 = 0;$$

$$z^2 + 3,0625l \cdot z - 1,1625l^2 = 0;$$

$$z = \left(-1,53125 + \sqrt{1,53125^2 + 1,1625} \right) \cdot l = 0,342l.$$

Этой точке соответствует точка перегиба упругой линии балки.

Участок II: $0,5l \leq z \leq l$

$$Q = -Q_0 - q \cdot z + P;$$

$$M = M_0 - Q_0 \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} + P \cdot (z - 0,5l);$$

при $z = 0,5l$ $Q = -1,73125ql$, $M = -0,43438ql^2$;

при $z = l$ $Q = -2,23125ql$, $M = -1,3ql^2$.

Участок III: $l \leq z \leq 2l$

$$Q = P = 0,3ql;$$

$$M = -m - P \cdot (2l - z);$$

при $z = l$ $M = -1,3ql^2$;

при $z = 2l$ $M = -ql^2$.

Эпюры Q и M показаны на рис.1.2.

3. Для построения эпюры прогибов вычислим три ординаты в пролете и две на консоли, используя уравнение метода начальных параметров.

При $z = 0,342l$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (0,342l)^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot (0,342l)^3}{3!} - \frac{q \cdot (0,342l)^4}{4!} \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{0,58125ql^2 \cdot (0,342l)^2}{2} - \frac{1,53125ql \cdot (0,342l)^3}{6} - \frac{q \cdot (0,342l)^4}{24} \right] = 0,0232 \frac{ql^4}{EI}. \end{aligned}$$

При $z = 0,6l$:

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (0,6l)^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot (0,6l)^3}{3!} + \frac{P \cdot (0,1l)^3}{3!} - \frac{q \cdot (0,6l)^4}{4!} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{0,58125ql^2 \cdot (0,6l)^2}{2} - \frac{1,53125ql \cdot (0,6l)^3}{6} + \frac{0,3ql \cdot (0,1l)^3}{6} - \frac{q \cdot (0,6l)^4}{24} \right] = 0,0442 \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 0,8l$:

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (0,8l)^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot (0,8l)^3}{3!} + \frac{P \cdot (0,3l)^3}{3!} - \frac{q \cdot (0,8l)^4}{4!} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{0,58125ql^2 \cdot (0,8l)^2}{2} - \frac{1,53125ql \cdot (0,8l)^3}{6} + \frac{0,3ql \cdot (0,3l)^3}{6} - \frac{q \cdot (0,8l)^4}{24} \right] = 0,0396 \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 1,5l$:

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (1,5l)^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot (1,5l)^3}{3!} + \frac{P \cdot l^3}{3!} + \frac{R_A \cdot (0,5l)^3}{3!} - \frac{q \cdot 1,5l^4}{4!} + \frac{q \cdot (0,5l)^4}{4!} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{0,58125ql^2 \cdot (1,5l)^2}{2} - \frac{1,53125ql \cdot (1,5l)^3}{6} + \frac{0,3ql \cdot l^3}{6} + \frac{2,53125ql \cdot (0,5l)^3}{6} - \right.$$

$$\left. - \frac{q \cdot (1,5l)^4}{24} + \frac{q \cdot (0,5l)^4}{24} \right] = -0,3130 \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 2l$:

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (2l)^2}{2!} - \frac{Q_0 \cdot (2l)^3}{3!} + \frac{P \cdot (1,5l)^3}{3!} + \frac{R_A \cdot l^3}{3!} - \frac{q \cdot (2l)^4}{4!} + \frac{q \cdot l^4}{4!} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{0,58125ql^2 \cdot (2l)^2}{2} - \frac{1,53125ql \cdot (2l)^3}{6} + \frac{0,3ql \cdot (1,5l)^3}{6} + \frac{2,53125ql \cdot l^3}{6} - \right.$$

$$\left. - \frac{q \cdot (2l)^4}{24} + \frac{q \cdot l^4}{24} \right] = -0,9135 \frac{ql^4}{EI}.$$

Эпюра прогибов y (упругая линия балки) показана на рис.1.2.

Задача 3

На рис. 3.1 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости и имеющая прямые углы в точках A и B . Требуется:

1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;

2) установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

Дано: $\alpha = 1,4$.

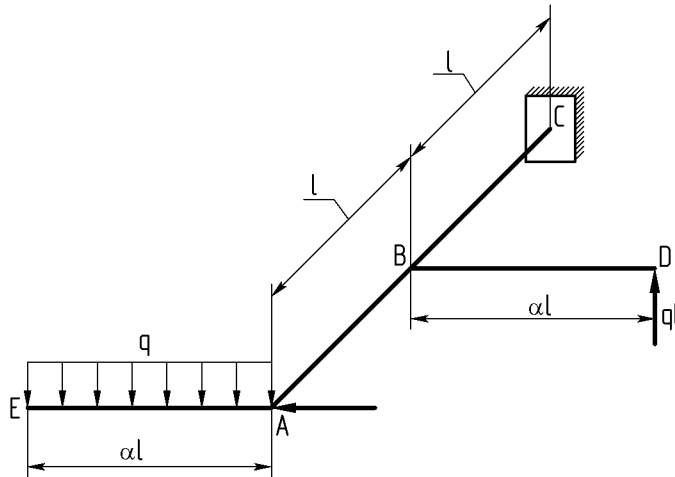


Рис.3.1

Решение

На рис. 3.2а показана ось ломаного стержня с приложенными нагрузками, а также выбранная система координат. Изгибающий и крутящий моменты в любом сечении стержня определяем как алгебраическую сумму изгибающих или крутящих моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону сечения.

1) участок EA , $0 \leq y_1 \leq 1,4l$:

Изгибающий момент на этом участке относительно оси $\tilde{o}$ равен

$$M_x = q \cdot \frac{y_1^2}{2},$$

при $y_1 = 0$: $M_x = 0$;

при $y_1 = 1,4l$: $M_x = 0,98ql^2$.

Крутящий момент на этом участке $M_{кр} = 0$.

2) участок AB , $0 \leq x_2 \leq l$:

Изгибающий момент на участке AB относительно оси z равен

$$M_z = 2ql \cdot x_2,$$

при $x_2 = 0$: $M_z = 0$;

при $x_2 = l$: $M_z = 2ql^2$.

Изгибающий момент на участке AB относительно оси y равен

$$M_y = 1,4ql \cdot x_2,$$

при $x_2 = 0$: $M_y = 0$;

при $x_2 = l$: $M_y = 1,4ql^2$.

Крутящий момент на участке AB :

$$M_{кр} = 1,4ql \cdot \frac{1,4l}{2} = 0,98ql^2.$$

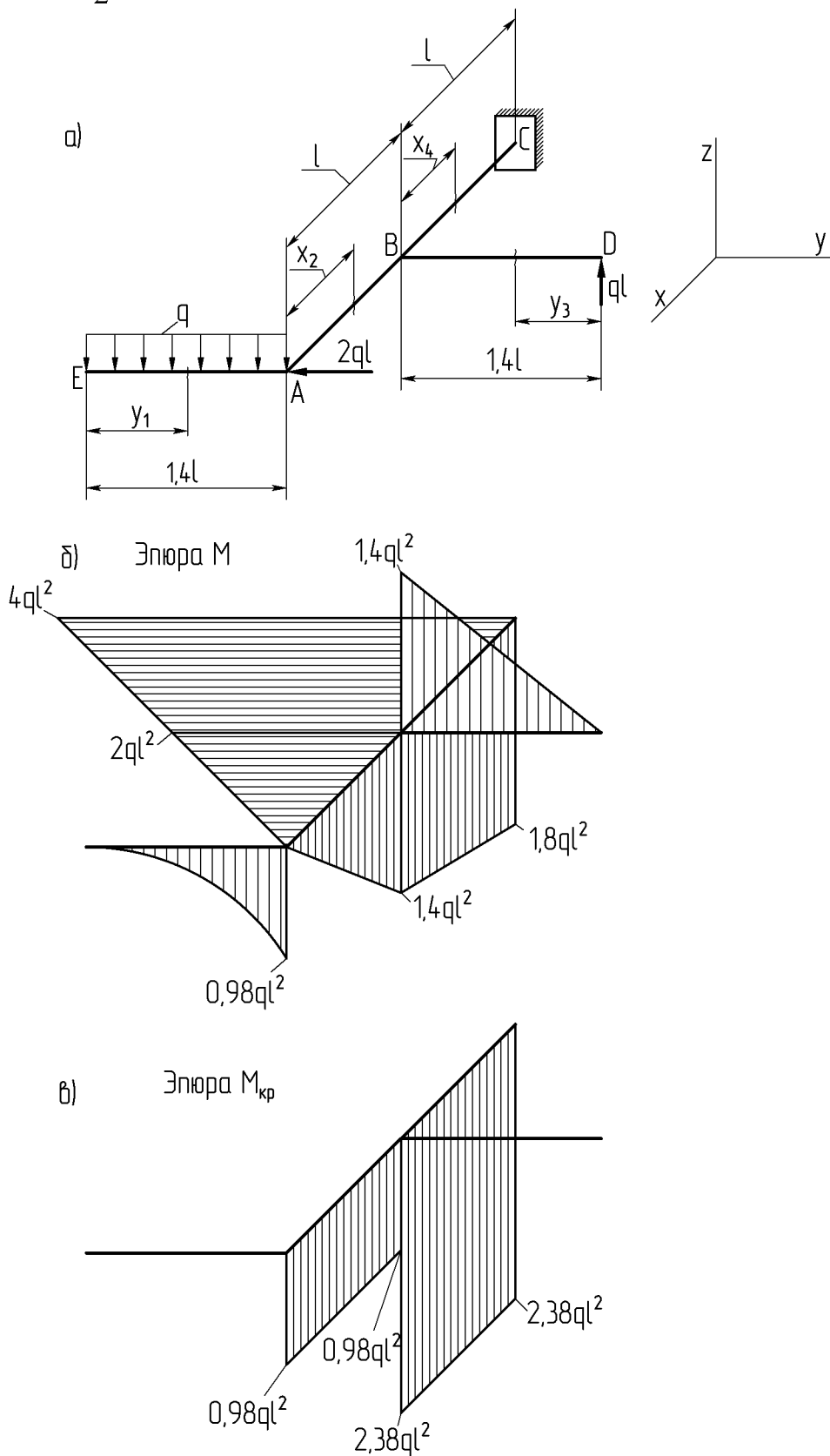


Рис.3.2

3) участок DB , $0 \leq y_3 \leq 1,4l$:

Изгибающий момент на участке DB относительно оси δ равен

$$M_x = ql \cdot y_3;$$

$$\text{при } y_3 = 0: M_x = 0;$$

$$\text{при } y_3 = 1,4l: M_x = 1,4ql^2.$$

Крутящий момент на участке DB $M_{\epsilon\delta} = 0$.

4) участок BC , $0 \leq x_4 \leq l$:

Изгибающие моменты на участке BC :

$$M_y = 1,4ql \cdot (l + x_4) - ql \cdot x_4 = 1,4ql^2 + 0,4ql \cdot x_4;$$

$$M_z = 2ql(x_4 + l);$$

$$\text{при } x_4 = 0: M_y = 1,4ql^2; M_z = 2ql^2;$$

$$\text{при } x_4 = l: M_y = 1,8ql^2; M_z = 4ql^2.$$

Крутящий момент на участке BC :

$$M_{\kappa p} = 1,4ql \cdot \frac{1,4l}{2} + ql \cdot 1,4l = 2,38ql^2.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 3.2б, эпюра крутящих моментов – на рис. 3.2в. При построении эпюры изгибающих моментов эпюры построены со стороны сжатых волокон.

Как видно из построенных эпюр опасным сечением будет сечение в точке C , для которого крутящий момент $M_{\kappa p} = 2,38ql^2$, составляющие изгибающего момента $M_y = 1,8ql^2$, $M_z = 4ql^2$, а величина суммарного изгибающего момента:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(1,8ql^2)^2 + (4ql^2)^2} = 4,39ql^2.$$

Расчетный момент по четвертой теории прочности для этого сечения равен:

$$M_{\odot} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{\kappa p}^2} = \sqrt{(4,39ql^2)^2 + 0,75 \cdot (2,38ql^2)^2} = 4,85ql^2.$$