Задача Д1

Груз массой $m = 1{,}8\,кг$, получив в точке A начальную скорость $V_0 = 24\,м/с$, движется по изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости. На участке AB на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила $Q = 5\,H$ (её направление показано на рисунке) и сила сопротивления среды $R = 0{,}3V$ (зависит от скорости груза и направлена против движения), трением груза о трубу пренебречь. В точке B груз через $2с$ после начала движения из точки A, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC, где на него кроме силы тяжести действует сила трения ($f = 0{,}2$) и переменная сила $F = 9t^2$, направленная вдоль трубы (по оси x). Считая груз материальной точкой и зная время движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

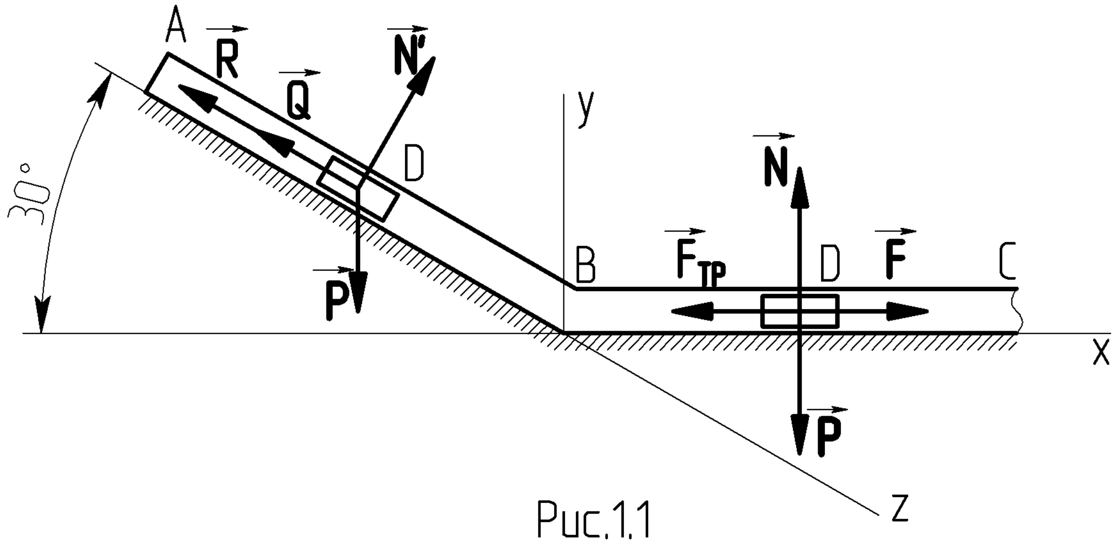

Рис.1.1

Решение

1.Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз в произвольном положении и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g};\ \vec{R};\vec{Q};\vec{N'}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \cdot \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz} \qquad (1)$$

Учитывая, что $V_z = V; \sum F_{kz} = P_z + N_z' + R_z + Q_z;\ P_z = mg \cdot \sin 30° = 1{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 8{,}83;\ N_z' = 0;\ R_z = -0{,}3V;$ $Q_z = -5$, получим:

$$1{,}8 \cdot \frac{dV}{dt} = 3{,}83 - 0{,}3V, \qquad (2)$$

или

$$\frac{dV}{V - 12{,}77} = -\frac{1}{6}dt. \qquad (3)$$

Интегрируя уравнение (3), получим:

$$\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V-12,77}=-\frac{1}{6}\int_{0}^{t}dt,$$

$$\ln\frac{V-12,77}{V_0-12,77}=-\frac{t}{6}.$$

Отсюда:

$$V=12,77+(V_0-12,77)\cdot\exp\left(-\frac{t}{6}\right). \qquad (4)$$

Полагая в равенстве (4) $V_0=24 м/с$ и $t=t_1=2с$, определим скорость груза в точке B:

$$V_B=12,77+(24-12,77)\cdot\exp\left(-\frac{2}{6}\right)=20,82 м/с.$$

2. Рассмотрим движение груза на участке BC. Найденная скорость V_B для движения на этом участке будет начальной скоростью ($V_0=V_B$). Изображаем в произвольном положении груз, а также действующие на него силы: $\vec{P}=m\vec{g}$; $\vec{N}$; $\overrightarrow{F_{тр}}$; $\vec{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt}=\sum F_{kx}=P_x+N_x+F_{тр_x}+F_x;$$

или, учитывая что $P_x=0$; $N_x=0$; $F_{тр_x}=-F_{тр}=-f\cdot N$; $F_x=F=9t^2$, получим:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt}=9t^2-f\cdot N. \qquad (5)$$

Для определения N составим уравнение движения груза в проекции на ось By. Так как проекция ускорения груза на ось By равна нулю, то получим:

$$0=N-mg;$$

отсюда

$$N=mg; \qquad (6)$$

следовательно

$$F_{тр}=f\cdot mg; \qquad (7)$$

и уравнение (5) примет вид:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt}=9t^2-f\cdot mg. \qquad (8)$$

Разделив обе части уравнения (8) на m, вычислим $\frac{9}{m}=\frac{9}{1,8}=5$, $fg=0,2\cdot 9,81=1,96$ и подставим эти значения :

$$\frac{dV_x}{dt}=5t^2-1,96. \qquad (9)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int_{V_0}^{V_x}dV_x=\int_{0}^{t}\left(5t^2-1,96\right)dt;$$

$$V_x-V_0=\frac{5}{3}t^3-1,96t. \qquad (10)$$

Подставляя в (10) $V_0 = V_B = 20,82\, м/с$ и выражая V_x, получим:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 20,82 + \frac{5}{3}t^3 - 1,96t;$$

или

$$\frac{dx}{dt} = 20,82 + \frac{5}{3}t^3 - 1,96t. \qquad (11)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(20,82 + \frac{5}{3}t^3 - 1,96t\right)dt;$$

$$x = \frac{5}{12}t^4 - 0,98t^2 + 20,82t.$$

Ответ: искомый закон движения груза на участке BC имеет вид

$$x = \frac{5}{12}t^4 - 0,98t^2 + 20,82t,$$

где t – в секундах, x – в метрах.

Задача Д2

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты 1 массой $m_1 = 18\, кг$, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D массой $m_2 = 6\, кг$. В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $u_0 = 2\, м/с$, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты. При движении груза расстояние $s = AD$ изменяется по закону $s = 1,2\cos(\pi t/2)$, где s выражено в метрах, а t – в секундах. Считая груз материальной точкой и, пренебрегая всеми сопротивлениями, определить зависимость $u = f(t)$, т.е. скорость плиты как функцию времени.

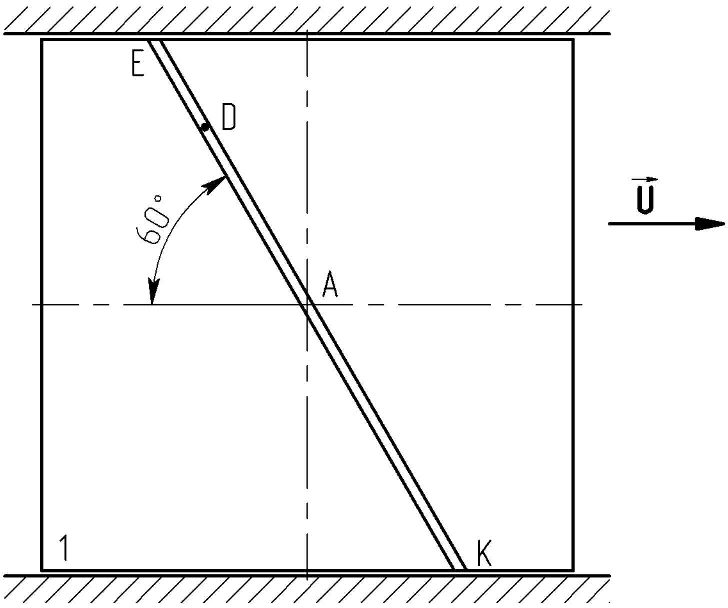

Рис.2.1

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты 1 и груза D, в произвольном положении (рис.2.2). Изобразим внешние силы, действующие на систему: силы тяжести $\overrightarrow{P_1}$ и $\overrightarrow{P_2}$, реакцию плоскости $\overrightarrow{N}$. Проведем координатные оси так, чтобы ось x была горизонтальной.

Для определения U воспользуемся теоремой об изменении количества движения $\vec{Q}$ в проекции на ось x. Так как все внешние силы вертикальны, то сумма проекций этих сил $\sum F_{kx}^{l} = 0$ и теорема об изменении количества движения $\vec{Q}$ дает:

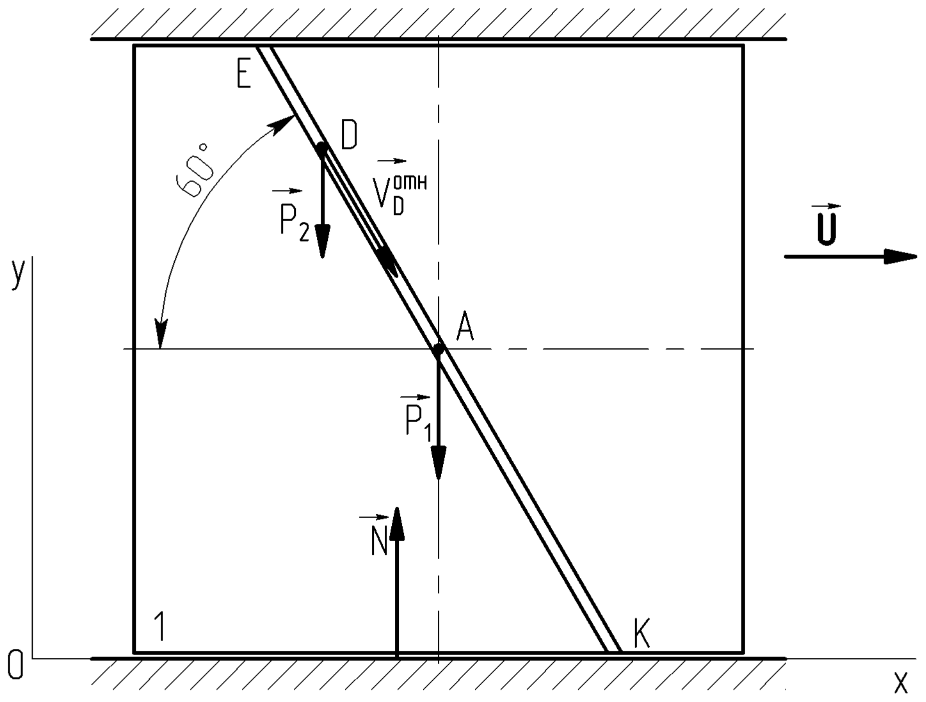

Рис.2.2

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_{kx}^{l} \quad \Rightarrow \quad Q_x = C_1 = const. \qquad (1)$$

Для рассматриваемой механической системы :

$$\vec{Q} = \vec{Q}_n + \vec{Q}_D,$$

где $\vec{Q}_n = m_1\vec{U}$ и $\vec{Q}_D = m_2\overrightarrow{V_D}$ − количества движения плиты 1 и груза D соответственно ($\bar{U}$ – скорость плиты, $\overrightarrow{V_D}$ –скорость груза по отношению к осям Oxy).

Тогда из равенства (1) следует:

$$Q_{nx} + Q_{Dx} = C_1,$$

или

$$m_1 U_x + m_2 V_{Dx} = C_1. \qquad (2)$$

Для определения V_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а движение плиты – переносным. Тогда:

$$\overrightarrow{V_D} = \overrightarrow{V_D^{пер}} + \overrightarrow{V_D^{отн}},$$

и

$$V_D = V_{Dx}^{пер} + V_{Dx}^{отн}. \qquad (3)$$

Но $\overrightarrow{V_D^{пер}} = \overrightarrow{U}$ и , следовательно $V_{Dx}^{пер} = U_x$. Вектор $\overrightarrow{V_D^{отн}}$ направлен вдоль желоба плиты *1* и численно равна:

$$V_D^{отн} = \frac{ds}{dt} = -0,6\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Изображаем вектор $\overrightarrow{V_D^{отн}}$ на рис.2.2 с учетом знака. Окончательно из равенства (3) получаем:

$$V_D = U_x + 0,6\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \cos 60° = U_x + 0,3\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right). \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и учитывая, что $U_x = U$, получим:

$$m_1 U + m_2\left(U + 0,3\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) = C_1. \qquad (5)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из начальных условий: при $t = 0 \quad U = U_0$.

Подстановка $t = 0$ и $U = U_0$ в уравнение (5) дает:

$$(m_1 + m_2)U_0 = C_1. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим:

$$m_1 U + m_2\left(U + 0,3\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) = (m_1 + m_2)U_0. \qquad (7)$$

Из (7) находим зависимость скорости U от времени:

$$U = U_0 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot 0,3\pi \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right). \qquad (8)$$

Подставив в (8) числовые значения соответствующих величин, находим искомую зависимость U от t:

$$U = 2 - \frac{6}{18 + 6} \cdot 0,3\pi \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right). \qquad (9)$$

Ответ: $U = 2 - 0,075\pi \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, где U – в $м/с$, t – в секундах.