Задание 3

Локализовать корень нелинейного уравнения и найти его методом бисекции с точностью . Выбрав полученное решение в качестве начального приближения, найти решение уравнения методом простой итерации с точностью . Для метода простой итерации обосновать сходимость и оценить достаточное для достижения заданной точности число итераций.

Решение

Отделим корни уравнения графически:

Отрезок локализации [1,5;2,5].

Функция непрерывна на этом отрезке и принимает на его концах значения разных знаков:

,

.

Первая итерация:

Найдем середину отрезка [1,5;2,5] и вычислим значение функции в этой точке: .

.

,

.

.

Остальные итерации представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | a | b | x | F(a) | F(b) | F(x) |  |
| 1 | 1,5 | 2,5 | 2 | 0,290388 | -0,62627 | -0,0907 | 0,5 |
| 2 | 1,5 | 2 | 1,75 | 0,290388 | -0,0907 | 0,117961 | 0,25 |
| 3 | 1,75 | 2 | 1,875 | 0,117961 | -0,0907 | 0,018671 | 0,125 |
| 4 | 1,875 | 2 | 1,9375 | 0,018671 | -0,0907 | -0,03473 | 0,0625 |
| 5 | 1,875 | 1,9375 | 1,90625 | 0,018671 | -0,03473 | -0,00771 | 0,03125 |
| 6 | 1,875 | 1,90325 | 1,889125 | 0,018671 | -0,00515 | 0,006826 | 0,014125 |
| 7 | 1,889125 | 1,90325 | 1,896188 | 0,006826 | -0,00515 | 0,000854 | 0,007063 |

Требуемая точность достигнута на седьмой итерации:

.

Приведем уравнение к итерационному виду:

или

Для второго уравнения выполняется условие сходимости итерационного процесса :

,

,

.

На отрезке [1.8891;1.9032] производная изменяется слабо, поэтому в качестве q примем любое значение из этого отрезка q=0.61

Оценим число итераций, необходимое для достижения заданной точности:

Критерий окончания итераций:

Итерации представлены в таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k | x(k) | |x(k)- x(k-1)| |
| 0 | 1,896 |  |
| 1 | 1,897919 | 0,001919 |
| 2 | 1,896754 | -0,00116 |
| 3 | 1,897462 | 0,000708 |
| 4 | 1,897032 | -0,00043 |
| 5 | 1,897293 | 0,000261 |
| 6 | 1,897134 | -0,00016 |
| 7 | 1,897231 | 9,63E-05 |
| 8 | 1,897172 | -5,9E-05 |

Задание 22

Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

на отрезке [t0,T] с шагом h=0.2: а) методом Эйлера; б) методом Рунге-Кутты 2-го порядка с оценкой погрешности по правилу Рунге. Найти точное решение задачи. Построить на одном чертеже графики точного и приближенных решений.

Метод Эйлера заключается в последовательном применении следующих формул:

,

,

*.*

|  |  |
| --- | --- |
| t | y |
| 1 | 3 |
| 1,2 | 3 |
| 1,4 | 3,237778 |
| 1,6 | 3,63678 |
| 1,8 | 4,163835 |
| 2 | 4,801995 |

Метод Рунге-Кутты второго порядка заключается в последовательном применении следующих формул:

*.*

Оценка погрешности по правилу Рунге:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | k1 | k2 | y |
| 1 |  |  | 3 |
| 1,2 | 0 | 0,237778 | 3,118889 |
| 1,4 | 0,198148 | 0,376357 | 3,406141 |
| 1,6 | 0,350898 | 0,49699 | 3,830086 |
| 1,8 | 0,478729 | 0,605943 | 4,372421 |
| 2 | 0,591808 | 0,707154 | 5,021902 |

Аналогично выполним вычисления с шагом h=0,4:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | k1 | k2 | y |
| 1 |  |  | 3 |
| 1,2 | 0 | 0,475556 | 3,237778 |
| 1,4 | 0,317037 | 0,616841 | 3,704717 |

Оценка погрешности по правилу Рунге:

Точное решение дифференциального уравнения:

Из начального условия :

Составим таблицу значений функции:

|  |  |
| --- | --- |
| t |  |
| 1 | 3 |
| 1,1 | 3,028182 |
| 1,2 | 3,106667 |
| 1,3 | 3,228462 |
| 1,4 | 3,388571 |
| 1,5 | 3,583333 |
| 1,6 | 3,81 |
| 1,7 | 4,066471 |
| 1,8 | 4,351111 |
| 1,9 | 4,662632 |
| 2 | 5 |

Построим на одном чертеже графики точного и приближенных решений:

Задание 25

Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

с шагами , и оценить погрешность по правилу Рунге. Построить графики полученных приближенных решений.

Решение

Разобьем отрезок [0,1] на части с шагом , получим четыре узловые точки:

,

*,*

,

,

Производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями:

для внутренних точек:

для граничных точек:

Решим систему уравнений методом прогонки:

Система удовлетворяет условию диагонального преобладания.

Прямой ход.

Вычислим прогоночные коэффициенты:

Обратный ход:

,

,

,

,

.

При подстановке в исходную систему уравнений все равенства верны, значит решение найдено верно.

Значит:

Разобьем отрезок [0,1] на части с шагом h=1/6, получим семь узловых точек:

,

*,*

,

*,*

,

*,*

,

Производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями:

для внутренних точек:

для граничных точек:

Расширенная система:

Откуда:

При подстановке в исходную систему уравнений все равенства верны, значит решение найдено верно.

Графики приближенных решений:

Задание 27

Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

используя явную разностную схему. Взять , шаг выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при

Решение

Введем сетку в области изменения независимых переменных:

Введем сетку по переменному t с шагом τ, которую обозначим

Таким образом, шаг по пространственной координате равен 0,1, шаг по временной координате – 0,1. Значит, координаты x, в которых определяется решение, равняются x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1.

Временная координата t принимает значения t=0; 0,1; …, 10

Исходное уравнение во внутренних точках заменим конечно-разностным уравнением:

В граничных точках:

…

,

,

,

…

,

,

,

,

,

,

,

,

,

.

Первый слой:

Откуда найдены значения для первого слоя:

Второй слой:

Откуда найдены значения для второго слоя:

Графики зависимости приближенного решения от x: